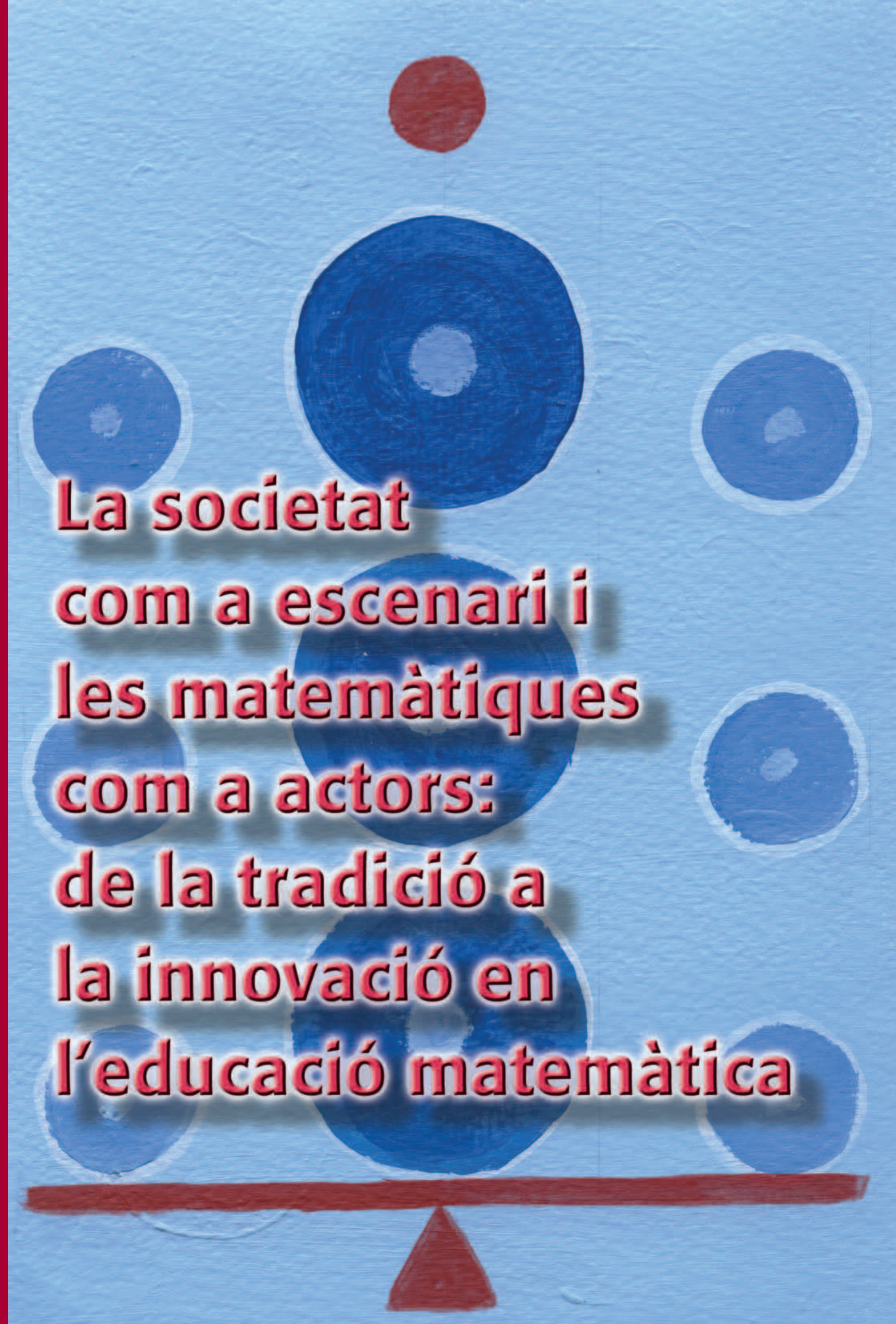


La societat com a escenari i les matemàtiques com a actors: de la tradició a la innovació en l'educació matemàtica

V Premi a la Recerca i la Innovació educatives Angeleta Ferrer i Sensat

La societat com a escenari i les matemàtiques com a actors: de la tradició a la innovació en l'educació matemàtica

V Premi Angeleta Ferrer i Sensat 2004

AJUNTAMENT DE REUS
Educació i Família

La societat com a escenari i les matemàtiques com a actors: de la tradició a la innovació en l'educació matemàtica

Joan Gómez i Urgellés

AJUNTAMENT DE REUS
Educació i Família

V Premi Angeleta Ferrer

Un any més, l'Àrea d'Educació i Família de l'Ajuntament de Reus posa a la vostra disposició el treball que en l'edició anterior va rebre el Premi Angeleta Ferrer i Sensat, que vol reconèixer les experiències capdavanteres en innovació i recerca pedagògiques.

El llibre que ara us presentem, *La societat com a escenari i les matemàtiques com a actors: de la tradició a la innovació en l'educació matemàtica*, fa incidència en una assignatura que l'alumnat històricament ha considerat un os dur de rosegar: les matemàtiques. Aquesta experiència s'escapa dels cànons més tradicionals d'aquesta disciplina i la resitua contextualitzada i aplicada, unes característiques que, segons l'autor del treball, no hauria d'haver perdut mai.

Així doncs, més enllà de les derivades, dels logaritmes i de l'abstracció matemàtica, aquesta ciència esdevé tangible i quotidiana: en la trama dels best-sellers del moment, en les pel·lícules del cinema, en els codis de barres, les matemàtiques ens envolten cada dia i formen part de la nostra vida més privada.

L'actitud del docent és important, però també ho és la dels alumnes. És per aquest motiu que *La societat com a escenari i les matemàtiques com a actors* presenta un perfil d'alumne molt més actiu, intuïtiu i participatiu que el que tradicionalment es pressuposa. Al cap i a la fi, l'autor té el convenciment –el qual comparteixo completament– que els alumnes, com a ciutadans del present i del futur, han de créixer amb una actitud crítica i amb fonament.

En definitiva, aquest treball trenca amb el divorci que des de fa anys hi ha entre la societat i les matemàtiques, i ens aporta un perfil més humà d'una ciència deshumanitzada amb els anys. L'experiència, contrastada i avaluada, d'aquesta nova metodologia d'ensenyar (i d'aprendre) matemàtiques fa que ens trobem davant d'un document valuós i interessant.

Empar Pont i Albert

Crèdits

V Premi a la Recerca i la Innovació Educatives Angeleta Ferrer i Sensat 2004

1a edició: novembre de 2005
Tirada: 100 exemplars

Edita:
Ajuntament de Reus
Àrea d'Educació i Família
Raval Santa Anna, 40 1r pis

Projecte gràfic i compaginació:
BE+A comunicació 2005
www.beiacom.com

Il·lustració portada:
Josep Gómez "Valera"

Quan la curiositat tendeix a infinit

Molts adults d'avui hem estat nens que hem patit les matemàtiques a l'escola perquè –suposo– no les vam entendre mai prou bé. Tota una generació de dones i homes, de la qual jo formo part, relacionem la nostra tendra infància amb la teoria dels conjunts. Quan algú diu "matemàtiques" jo encara penso en aquells conjunts que algú m'explicava quan tot just començava a aprendre també les primeres lletres. No sé si la culpa d'aquest dèficit personal es deu a aquella moda pedagògica dels conjunts, però sembla que allò no va tenir gaire continuïtat; per alguna cosa devia ser. En tot cas, la meva relació amb les matemàtiques sempre ha estat marcada per aquella primera i llunyana incomprensió. Amb els anys, he procurat conviure civilitzadament amb les matemàtiques, tot evitant l'hostilitat oberta i mirant-me-les amb un enorme respecte. Tinc la sort que em guanyo la vida amb les paraules i que mantinc amb els números una limitada promiscuïtat per evitar grans riscos. El ric univers de la matemàtica és, per a mi, un continent perdut i misteriós al qual, potser en una altra vida, arribaré.

De totes formes, un dels goigs de la meva trajectòria escolar va ser trobar-me amb algú que, tot i no poder convertir-me en un bon matemàtic, va fer-me adonar de la bellesa i utilitat (utilitat bella i bellesa pràctica) de les matemàtiques. Aquest mèdium, aquest guia, aquest descobridor de l'altra banda de la pissarra (que és com l'altra banda d'aquell mirall meravellós d'Alícia, imaginat per l'escriptor i matemàtic Lewis Carroll) va ser l'amic Joan Gómez i Urgellès, autor d'aquest suggerent i lúcid assaig pedagògic que ara teniu a les mans. El professor Gómez no em va fer més savi (tot i la seva dedicació) però em va fer més conscient de la màgia d'un llenguatge creat per l'home per mirar, descriure i dominar la realitat. La seva passió i el seu saber em van fer intuir que la matemàtica tenia més a veure amb la poesia que amb la gimnàstica, que tenia més a veure amb l'aventura que amb la rutina, que tenia més a veure amb l'ànima de les coses que amb la seva materialitat tangible.

Un dels moments d'epifania de la meva formació infantil i adolescent va ser quan vaig descobrir, mitjançant les matemàtiques, que tot pot tendir a infinit. ¿Pot haver-hi una història millor que aquesta? L'abstracció de la matemàtica m'obria la porta del somni i també m'excitava la curiositat. Aquell dia em vaig treure el barret i vaig saludar amb reverència les arrels quadrades, els logaritmes, les integrals, els sinus i, fins i tot, els cosinus. No els acabava d'entendre però, finalment, els estimava; com s'estima un país on mai s'ha viatjat, com s'estima una persona que s'ha somiat, com s'estima una època coneguda només pels llibres d'història. En Joan Gómez em va dir que tot tendia a infinit i que, si m'hi fixava bé, veuria com els sinus em saludaven al tombar la cantonada i les arrels quadrades em feien companyia en passejar durant les tardes d'hivern, quan la llum que minva es replega sobre si mateixa fent més esfèrica l'ombra de les idees. De veure la matemàtica com un obstacle insalvable vaig passar a veure-la com la porta màgica d'una altra dimensió.

La meva curiositat va tendir també a infinit però la meva base matemàtica era massa feble per poder-me enlairar vers els secrets sublims de la música de les esferes. ¡Què hi farem! D'aquell descobriment m'ha quedat una admiració suprema vers els matemàtics de raça com el professor Gómez, una sana enveja d'aquells que es mouen entre els nombres com si fessin malabars, i una nostàlgia estranya i persistent per aquest món infinit que es pot expressar amb un petit signe matemàtic.

Som animals que ignorem. Les ignoràncies tendeixen a infinit i cadascú en té moltes, jo el primer. Les matemàtiques, que ens ajuden a mirar el món i també a tenir-ne un cert control (sempre a punt de trencar-se) ens fan més lliures. La llibertat es troba, així, vinculada a un llenguatge universal que tant serveix per calcular estructures d'edificis, per fer volar coets en l'espai, o per preveure els efectes d'una caiguda als mercats borsaris. És el poder que prové d'una creació de la intel·ligència humana, allò que ens permet sortir de les tenebres, que ens permet conjurar les pors ancestrals i relativitzar el pes dels astres en les nostres vides. Però també aquests llenguatge tan virtuós que és la matemàtica, com tota ciència, pot caure al cantó obscur; el de la guerra, l'opressió, la destrucció i l'horror. Perquè la voluntat humana, per damunt de tot, sempre pot conduir-nos a un mal ús de la llibertat i, per tant, a un mal ús del coneixement. Malauradament, el passat segle xx ens va ensenyar que també el mal i l'horror poden tendir a infinit.

Però siguem raonablement optimistes. El matemàtic i pedagog Joan Gómez creu en el progrés de les consciències humanes perquè creu en la força de l'educació. Aquest treball n'és la prova. Comparteixo amb l'autor aquesta premissa: per fer una societat millor ens cal ensenyar bé i amb il·lusió aquells que seran ciutadans. Aquesta és una condició necessària (però no suficient) per aspirar a una vida col·lectiva en la qual prevalguin els valors constructius.

Com aquest llibre excel·lent demostra, les matemàtiques no són només una explicació de la vida, són part essencial de l'existència. Entendre això és anar més enllà de la superfície de les coses i travessar, feliços, la ratlla que separa l'espai limitat de l'espai infinit.

Francesc-Marc Álvaro

Índex

Introducció

Amb el cor ple de tristesa

En el moment d'escriure aquest text, es va produir el traspàs del professor i mestre Miguel de Guzmán, m'agradaria que el text fos un petit homenatge a la seva herència acadèmica i humana. En record al Dr. Miguel de Guzmán (1936-2004), filòsof i matemàtic, pioner en la innovació docent i mort l'abril del 2004 mentre escrivia aquest text. Les seves sàvies orientacions són els fonaments de la metodologia experimentada. De tu, Miguel, sempre ens quedarà la teva obra i els teus bons consells, fets que malgrat el pas del temps no s'esborraran. Amb la teva contribució he après a estimar no només el món de l'ensenyament i les matemàtiques, sinó també el grau d'humanitat que avui per avui manca en molts racons i indrets de la nostra societat. No dubtis que, malgrat el teu traspàs, gaudirem sempre de la teva presència; el teu esperit ha de continuar mantenint la fermesa i l'empremta que any rere any has forjat en el món educatiu i social.

Presentació

"Ensenyo per aprendre i aprenc per ensenyar" Lluís Santaló

El document que tenen a les mans presenta una contribució al procés d'ensenyament/aprenentatge de les matemàtiques a nivell universitari. Consta d'un marc teòric acompanyat d'un disseny d'una metodologia innovadora (la modelització matemàtica) que s'ha experimentat durant els darrers cinc anys a la Universitat Politècnica de Catalunya destacant-ne els resultats obtinguts i la viabilitat. En concret, l'experiència ha estat d'ençà cinc anys i fins a l'actualitat a l'Escola Politècnica Superior d'Enginyeria de Vilanova i la Geltrú, amb estudiants de primers cursos. El treball inclou també les pràctiques efectuades en l'experimentació i una avaluació dels resultats avalada pels comentaris efectuats pels mateixos estudiants, i alhora presenta noves tècniques d'avaluació del rendiment acadèmic.

L'escenari: l'ensenyament de les matemàtiques a les escoles universitàries; els actors: els models matemàtics; els protagonistes: els estudiants; el guió: la innovació docent.

El missatge a transmetre és que *les matemàtiques poden ser útils i atractives*. Voldria plasmar el sentiment de què vol dir fer matemàtiques. Fer matemàtiques no és realitzar un seguit de rutines, ni fer més temes; és, en tot cas, oferir més idees i més creativitat; fer matemàtiques és una manera de pensar i de viure; fer matemàtiques és una manera de mirar el món que ens envolta; ensenyar matemàtiques forma part de l'educació i la formació de ciutadans destacant el component humà de les matemàtiques i despertant l'esperit crític tot fomentant el debat i el treball en grup. Els trets fonamentals són els aspectes epistemològics (relació matemàtica-realitat), l'anàlisi cognitiva (en les produccions matemàtiques) i el component heurístic com a conjunt d'habilitats en el procés d'aprenentatge.

El text conclou amb tres annexos en els quals es detalla la presència de les matemàtiques al nostre entorn com a recurs educatiu, un recull seleccionat d'adreces web d'educació matemàtica i el llegat acadèmic d'en Pere Puig Adam (matemàtic i pedagog català), en què es plasma el decàleg de l'ensenyament de les matemàtiques com a exponent de la seva tasca educativa i militància per la innovació docent.

A tots els que mai han sentit gust per les matemàtiques i de les quals en tenen un record llunyà, els desitjo que amb la lectura d'aquestes planes mirin el món matemàticament; crec que d'aquesta manera podrem aconseguir un món millor, més just i més solidari. És el meu desig la voluntat que la lectura d'aquest text sigui un referent i un element de reflexió per tal d'adquirir un esperit crític i alhora enriquidor per a un ensenyament més digne de les matemàtiques.

Preliminars

"Ensenyar bé és ajudar a comprendre allò que es vol transmetre" G. Pòlya

Sovint els assaigs de pedagogia han estat moltes vegades patrimoni de les àrees humanístiques. En el camp de les ciències, i en particular de les matemàtiques, hi ha una mancança de treballs educatius. Quan hom sent la paraula *matemàtiques* sembla que li agafin ganes de fugir. I més encara si les accions pedagògiques s'engloben en estudis universitaris. Poques persones, en fullejar superficialment els continguts d'aquest text, no deuen haver sentit una sensació d'avorriment. Les matemàtiques tal i com s'entenen als nostres temps no acostumen a despertar passions. Se les considera quelcom tendenciós i inútil. Raymond Smullyan, matemàtic, en el seu llibre *La Dama o el tigre y otros pasatiempos* –un llibre sobre entreteniments matemàtics– comenta que el pare d'un infant que llegia un llibre seu li va dir: "Raymond, el meu fill està llegint un llibre teu i li encanta, però no li diguis que el que està fent és aprendre matemàtiques, ja que odia les matemàtiques! Si el nen sabés que està llegint realment un llibre de matemàtiques deixaria de llegir-lo". A molta gent li passa el mateix. Relacionen les matemàtiques amb inacabables hores davant d'una pissarra farcida de fórmules, números i expressions quasi demoníaques, quelcom veritablement traumatitzant. Sembla evident, doncs, que les matemàtiques i el seu ensenyament no estan ben considerats.

Aquest treball neix doncs d'analitzar aquesta situació tot fent una mirada i una reflexió de l'estat actual del tema com un repte per millorar la qualitat docent. En el present text es pretén precisament enderrocar els tòpics que aboquen les matemàtiques al camp d'allò inassolible, avorrit i inútil, tot viatjant pels vells horitzons que a partir del seu ensenyament es poden visualitzar. El text conté experiències profitoses realitzades a les aules, conclusions obtingudes i alhora recursos educatius. L'objectiu d'aquest material és oferir una imatge optimista de les matemàtiques i per això consideraré principalment dos aspectes:

a) Criticar l'ensenyament i l'aprenentatge estàndard i tradicional de les matemàtiques presentant una vessant heurística i cognitiva.
b) Oferir una visió utilitarista dels continguts (visió epistemològica) i alhora recursos educatius.

De fet s'intenta mostrar la cara amable de les matemàtiques partint de consideracions teòriques tot aportant exemples quotidians comuns a tots els lectors.

El treball està estructurat en dues parts: una la podríem considerar el marc teòric que invita a la reflexió en el noble ofici d'educar. Es parteix del fracàs de l'ensenyament tradicional de les matemàtiques –tant en els aspectes metodològics com en els de continguts– i es presenta una aposta per tendències pedagògiques d'orientació més utilitàries i novedoses. El treball mostra experiències que han obtingut resultats de qualitat i la viabilitat de la metodologia que s'exposarà. De fet, és una experiència educativa innovadora fonamentada pels resultats que s'esdevenen de l'experimentació.

Una altra vessant del text, més de caire divulgatiu, ofereix exemples del paper formatiu de les matemàtiques en diverses àrees de coneixement com una matèria interdisciplinària que integra diverses parcel·les del saber. Tot plegat pot servir per potenciar el binomi ensenyament-aprenenetatge. Per aquest motiu es presenta una metodologia docent que ha donat resultats contrastats de qualitat. El text ens aporta aspectes i situacions concretes experimentades els darrers anys acadèmics a les aules universitàries, experiències i metodologies que són susceptibles de traslladar als currículums de secundària. El treball el podem definir com una reflexió de l'estat actual de l'ensenyament i alhora com una aportació a la millora metodològica de la qualitat docent apostant per la innovació.

El contingut consta d'un marc teòric on es resumeix la metodologia de treball i la fonamentació, avalada per experiències concretes i desenvolupades amb estudiants.

Les experiències estan focalitzades en la innovació metodològica de l'ensenyament de les matemàtiques. El treball realitzat té com a objectiu la implantació de mètodes docents que han donat resultats òptims d'aprenentatge, la difusió d'accions pedagògiques i alhora la popularització de les matemàtiques, oferint una visió diferent i més racional del seu ensenyament.

L'estudi que tenen a les mans pretén oferir, doncs, una contribució en aquesta àrea estimulant el procés creatiu i alhora utilitarista de les matemàtiques. De fet, es mostra com una matèria com les matemàtiques pot, efectivament, ser útil i alhora provar el fracàs dels mètodes tradicionals d'ensenyament. Entenc per mètodes tradicionals els que s'esdevenen de les anomenades *matemàtiques modernes*, corrent de mitjans del segle XX (l'anomenat Bourbkisme) que va ofegar la intuïció a favor de l'abstracció. S'havien descartat problemes molts interessants de la vida real (modelització) i per tant s'obté el consegüent deteriorament tot perdent, els alumnes, la intuïció. Molt aviat es va observar que aquest canvi seria un autèntic fracàs. De fet, les pràctiques presentades en el text comporten un canvi pedagògic a tots els nivells educatius i conviden a la reflexió.

En l'acció pedagògica global, i en particular en l'àrea de matemàtiques, són adients les paraules de Joan Triadú (*Revista Biec*, n. 27, 2002): *"Els professors haurien de tenir una preparació didàctica o pedagògica expressa per a l'ensenyament que efectuen. Hi ha molta gent que fa carreres sense la intenció d'ensenyar-les després i es troben a l'ensenyament per qüestions laborals. No s'hi senten bé ni estan preparats per fer-ho. L'ensenyament vol una predisposició personal i s'ha de reforçar amb una predisposició pedagògica que moltes vegades no hi és".* Aquestes senzilles paraules d'en Triadú il·lustren la voluntat de fer quelcom per millorar la qualitat docent.

Tots som conscients que a secundària s'ha fet una reforma curricular; tant si ens agrada com si no, és una realitat. L'impacte de les noves tecnologies i d'altres elements fan que l'actuació del docent hagi de canviar: cal replantejar continguts i metodologies.

No podem ignorar els canvis que dia a dia afecten la societat.

Una de les idees més engrescadores per als estudiants és el caire interdisciplinari de les diverses àrees de coneixement. En matemàtiques sorgeixen preguntes usuals com: ¿Quan es fa tal o qual tema, per a què serveix? ¿On s'usa?… *Això ja ho veureu els propers cursos* (io mai!). L'exemple més clar de metodologies obsoletes és en l'àrea de matemàtiques, on s'usa al segle XXI pedagogia del segle XIX. Crec que cal motivar l'estudiant fent visibles els lligams entre el que s'explica amb les altres matèries curriculars i de l'entorn quotidià.

Penso que a les nostres escoles, desgraciadament, encara valorem poc alguns factors decisius en la formació de ciutadans, com ara pensar abans d'actuar, tenir iniciativa pròpia, fer descobertes o trobar estratègies, i en canvi potser valorem massa fer bé les operacions aritmètiques escrites o obtenir un resultat exacte sigui com sigui. Les matemàtiques, a més d'una parcel·la del saber, són una manera de veure les coses i per tant el llenguatge matemàtic no ha de ser mai el punt de partida, sinó més aviat el punt d'arribada. S'ha vist imprescindible tenir cura i cultivar la intuïció, la manipulació i la intel·ligència del que es fa, sense oblidar els continguts intuïtius. Podríem dir que es té present la següent màxima: "no ensenyar teoria que mai es pot arribar a utilitzar o desenvolupar com a eina aplicativa".

D'aquesta manera, les matemàtiques reflecteixen un caràcter més humà, tot guanyant assequibilitat, dinamisme, interès i atracció.

Així ha vist en Cesc la nostra feina.

Anàlisi de l'ensenyament actual de les matemàtiques

"Plantejar preguntes noves, possibilitats noves, veure els problemes des d'un angle nou, requereix imaginació creativa i és senyal d'un autèntic avenç..." Albert Einsten i L. Infeld. L'evolució de la física*, 1938.*

En apologia a la innovació. Ramon Sabatés (1916-2003), pèrit mecànic. Alguns dels seus invents s'han desenvolupat a la indústria.

Justificació i objectius

L'aportació és fruit de la meva pròpia experiència, quan era estudiant de la llicenciatura de matemàtiques i com a docent.

La meva preocupació ha estat una constant en el sentit que formem futurs professionals i no futurs matemàtics, i cal tenir en compte que l'heurística de l'aprenentatge és un paràmetre fonamental en l'educació dels ciutadans. A partir d'aquest fet m'he posat a treballar en aquest sentit, tot cercant iniciatives que fossin diferents de l'ensenyament tradicional en benefici d'una millor qualitat docent i orientades tant al futur professional com al tarannà quotidià, fent especial èmfasi en l'epistemologia de les matemàtiques i els seus aspectes cognitius vers les aplicacions de les matemàtiques en el dia a dia. Ratifico que el present treball consisteix a implementar els mètodes del que s'anomena modelatge matemàtic i mostrar que els resultats obtinguts són eficients en el procés d'aprenentatge destacant-ne la viabilitat.

Alguns dels objectius es poden sintetitzar, entre d'altres, en diversos aspectes:

1. Que l'estudiant adquireixi un grau de motivació pels estudis que cursa.
2. Que l'estudiant descobreixi a partir de situacions reals la utilitat de les matemàtiques.
3. Presentar les matemàtiques com una ciència aplicada, en el sentit que les matemàtiques són "la reina i alhora servent de les altres àrees de la ciència".
4. La inclusió de les tècniques del modelatge matemàtic com a forma d'aprenentatge diferent al tradicional.
5. Ajudar l'estudiant a adquirir i comprendre tècniques i conceptes matemàtics a partir de les seves aplicacions.

De fet, es tracta d'afavorir la creativitat, motivar els estudiants de cara a les seves necessitats reals dels continguts curriculars i posar a la seva disposició un conjunt de recursos per comprendre més àmpliament l'aplicabilitat dels conceptes que li transmetem en la seva formació i, en definitiva, com usar les tècniques apreses en un context real. Les matemàtiques, que segons el diccionari són la "ciència de la quantitat i de la forma", són presents a totes i cadascuna de les activitats humanes. És la ciència més humana de totes les ciències, malgrat que de vegades sembla que alguns s'esforcen a distanciar-la de la realitat fins al punt que els alumnes, usuaris de les matemàtiques, no li acaben de veure la presència i l'aplicació.

En síntesi, les experiències desenvolupades plantegen una articulació del contingut de la matemàtica que afavoreixi la perspectiva interdisciplinària i el pensament creatiu, utilitzant i descobrint coneixements matemàtics mitjançant el plantejament de problemes reals. També implica un canvi substancial en la metodologia, que adquireix una vessant heurística alhora que fa servir tècniques de modelatge matemàtic, utilitza nous recursos i replanteja els processos d'avaluació. La realització d'aquestes experiències pressuposa un canvi fonamental en la concepció del rol del professor i del seu perfil formatiu, i la preparació contextual i emergent de material.

Ratifico que el treball realitzat està focalitzat, per tant, a oferir noves orientacions en l'ensenyament de les matemàtiques, oferint recursos i mètodes innovadors que proporcionin un tarannà més utilitarista dels continguts matemàtics curriculars. Es presenta una anàlisi de l'ensenyament actual emfatitzant els punts febles de l'ensenyament de les matemàtiques tot oferint una vessant utilitarista i tot un seguit de recursos per tal de gaudir d'un ensenyament de més qualitat en la formació de ciutadans.

Es presenten experiències desenvolupades a les aules, en apologia a la innovació i les noves orientacions, que formen part de la formació dels estudiants i que han donat resultats rellevants. De fet, és un recull d'experiències de cinc anys d'innovació en l'àrea de les matemàtiques realitzada a primers cursos de la universitat, les experiències s'esdevenen d'aplicar una metodologia de treball que es fonamenta en un marc teòric vàlid per a ensenyaments de batxillerat i d'altres nivells educatius.

Cal tenir en compte que els estudiants d'avui són ciutadans de demà, i que per tant el grau de professionalitat que assoleixin depèn en certa manera del procés d'aprenentatge actual.

Reflexions entorn l'ensenyament actual de les matemàtiques

A continuació es presenta una anàlisi de la situació actual de l'ensenyament de les matemàtiques, tot posant de manifest els punts febles i justificant la necessitat d'una nova orientació en la metodologia docent.

Es pot comprovar que en els darrers anys tot ha evolucionat. En les empreses, s'introdueixen aparells que com a veritables robots (autòmats programables) substitueixen l'operari artesà, ordinadors que agiliten els moviments comptables, fins i tot els diners es troben dins de les anomenades targetes de crèdit (actualment tothom ha sentit parlar de la *targeta moneder*). Notem que l'ensenyament de les matemàtiques no troba adeptes que el faci evolucionar. M'he adonat que sovint s'ensenyen les matemàtiques igual que fa cinquanta anys: *en blanc i negre* (l'únic canvi observat és la substitució de l'ús de les clàssiques taules de logaritmes i trigonometria per les calculadores de butxaca, i potser per imperatiu dels estudiants).

S'observen fets rellevants, comuns a tots els docents i, si som sincers, ens n'hem de recordar (tant en la nostra experiència d'estudiants com en la de professors), els principals punts febles són:

– En ocasions desconcertem l'alumnat insistint regularment sobre el temps que falta per cloure un examen.
– Sovint se segueixen des dels inicis de la carrera docent, el mateix llibre de text tot copiant al peu de la lletra el seu contingut a la pissarra. El més greu d'aquest punt és que els continguts són els mateixos tant si els interlocutors són futurs químics com enginyers. D'aquesta manera ens allunyem de les seves aplicacions en l'especialitat del futur professional.
– Hem vist com en els problemes suggerits, error que més o menys hem comès tots, les dades són sempre prou *bones* per tal que els resultats siguin allò que els alumnes en diuen *exactes* (entendrem enters) desconnectant-los d'aquesta manera de les situacions quotidianes.

D'altra banda, he mantingut debats per tal d'esbrinar si es considera oportú o no un canvi d'orientació en l'ensenyament. Aquests són alguns dels arguments i de les conclusions extretes d'aquestes converses:

– Sovint els professors no som prou coneixedors de les altres àrees de coneixement de l'especialitat ni d'aspectes considerats tradicionalment d'humanitats.
– Hi ha professors que pensen que ja és massa tard per a ells i que potser són massa grans per usar noves tècniques i metodologies.
– Molts professors se senten còmodes ensenyant temes tal i com els van ensenyar i pateixen, alhora, una manca de confiança en ells mateixos per introduir canvis.
– Incloure dades i temes afins a l'especialitat exigeix un treball continu i extra. Ja els va bé explicar el mateix cada any. Organitzar visites, llegir diaris (per exemple, explicar les corbes de nivell partint d'un retall de premsa del mapa del temps, o bé entendre i interpretar les gràfiques de l'evolució del mercat borsari) requereix una dedicació especial. Això es pot caracteritzar com una mena de por a la innovació.
– Treballar en temes nous implica plantejar avaluacions coherents amb aquests temes, fet que trenca l'esquema d'avaluació tradicional i rutinària.

Segons Santaló (1975), "quan algú diu a un professor de matemàtiques que ha d'ensenyar nous temes, immediatament demana més hores de càtedra". Mai no es pensa a reordenar els continguts i redefinir els mètodes. I a Ortega i Gasset, al seu llibre *Missió de la Universitat* (1930) deia: "Un dels mals portats per la confusió de ciència i Universitat ha estat donar les càtedres, segons la mania del temps, als investigadors, els quals són quasi sempre pèssims professors que senten l'ensenyament com un robatori d'hores al seu treball de laboratori o d'arxiu". En Claudi Alsina (1995) afirma: "Els estudiants volen aprendre però de forma agradable i entretinguda, amb ganes de tornar el pròxim dia a classe; per això seria interessant canviar aquesta mecànica tradicional per una de més nova i adient a les necessitats dels interessats".

Cal reflexionar sobre la situació actual de l'ensenyament de les matemàtiques a les escoles, itineraris, i llurs aplicacions de cara al futur professional i el seu entorn curricular. La desconnexió en l'ensenyament actual entre les matemàtiques i la realitat i comentaris tan usuals com ara: "…d'aquests conceptes, ja en veureu la utilitat quan estudieu tal assignatura…", m'han portat a analitzar i pensar en quina és la matemàtica i metodologia més convenient per a cada nivell d'aprenentatge i la manera més eficaç perquè aquesta matemàtica sigui ben assimilada. ¿Cal donar a l'ensenyament de les matemàtiques un altre tipus d'orientació? ¿És necessari introduir aplicacions i fomentar el debat entre el binomi matemàtiques pures i aplicades?

L'anomenada escola bourbakista va introduir el que es coneix com *matemàtica moderna,* a mitjans dels anys cinquanta, que ha donat a l'ensenyament un tarannà abstracte, fent invisible tot allò que pot ser visible i bonic! En el pròleg del llibre *Geometria Mètrica* (1947) Puig Adam deia: "qui pogués escriure un llibre capaç de despertar el respecte al rigor sense ofegar la intuïció!".

D'aquesta manera apareix la figura del *professor tradicional*, caracteritzat per oferir un ensenyament que consisteix en una successió de definicions, teoremes, corol·laris, amb totes les demostracions en el si de les assignatures que imparteix; tot donant més importància als continguts teòrics que no pas a les seves aplicacions. En aquesta línia Sixto Ríos (1996) manifesta:

> "Es considera actualment que la forma tradicional d'ensenyar les matemàtiques és comparable a un edifici acabat on es parteix d'uns axiomes i es demostren lemes, teoremes i corol·laris en una successió extremadament avorrida (al menys pel 95% dels estudiants), finalitzant amb uns exercicis que oscil·len entre coses trivials i enginyoses, però que estan sempre tan lluny de les seves aplicacions reals com la teoria exposada que és totalment inadequada pel que aspira a aplicar les matemàtiques, s'anomeni físic, biòleg, economista o enginyer. Els problemes de la realitat no es presenten mai com exercicis del final de les lliçons d'un llibre tradicional de matemàtiques, que comencen amb frases com les següents: "Demostreu que si *E* és un espai vectorial…, Provar que si *f* és de classe…" Són totalment oposats al tipus: "¿Com pot evolucionar una població de 1.000 peixos que es col·loquen en un viver…? ¿Com podem esbrinar el moviment d'un satèl·lit que…?".

En una visió curricular, l'educació des de les etapes de secundària hauria de ser més àmplia que profunda. Hauria de ser una veritable educació en humanitats on els estudiants no només aprenguin els continguts de cada matèria, sinó també quin paper té en la nostra cultura i la nostra societat. Des d'aquesta perspectiva, ¿què poden oferir les matemàtiques, a més a més de l'aritmètica, d'ús quotidià?

El Dr. Claudi Alsina, en l'article "Apología de la utilidad y el realismo" (1996) cita una bella reflexió de H. Pollack: "Tradicionalment, les matemàtiques de la vida normal de cada dia han estat les matemàtiques de l'escola primària. Les matemàtiques per exercir una ciutadania intel·ligent haurien de ser bàsicament les matemàtiques de secundària. Les matemàtiques de l'exercici professional han de ser les ensenyades en l'etapa universitària (si l'exercici de la professió requereix estudis d'aquest nivell). Les matemàtiques com a part de la cultura integral humana no han estat assignades a cap nivell educatiu".

Històricament, des de Newton fins a Dirac i passant per Maxwell, es feia especial èmfasi en les aplicacions de les matemàtiques. Aquest fet es trenca a finals dels anys cinquanta, i deu anys més tard en els textos de matemàtiques hi havia pocs exemples pràctics. A Anglaterra, a principis dels setanta, i degut a la proliferació de les escoles tècniques, sorgeixen els primers esglaons per introduir les matemàtiques amb un enfocament més pràctic en els currículums. Cal que el sistema educatiu universitari s'adapti a les innovacions.

Les matemàtiques han portat els pintors a pintar de forma realista, i no només han fet possible comprende els sons musicals, sinó també l'anàlisi d'aquests sons que són imprescindibles per construir els telèfons, la ràdio i d'altres aparells de gravació i reproducció de sons –matemàtiques essencials en els estudis d'enginyeria tècnica. Les matemàtiques apareixen en les investigacions de biologia i medicina, les matemàtiques són imprescindibles per a la tecnologia actual.

El coneixement és un tot i les matemàtiques un subconjunt del tot. No es desenvolupen per separat de les altres activitats. Ensenyar matemàtiques de forma aïllada és una distorsió del veritable coneixement. Cada matèria representa una aproximació al coneixement, i qualsevol barreja o intersecció convenient i pedagògicament útil ha de ser benvinguda. D'aquesta manera ensenyaríem més enllà de les mateixes matemàtiques, les relacions de les matemàtiques amb d'altres interessos socials i humans, un currículum matemàtic que cercaria la unió amb les principals corrents del pensament humà i tecnològic. Algunes d'aquestes relacions podrien proporcionar una motivació, altres serien aplicacions i altres, motiu de debat.

Les matemàtiques no són un conjunt de coneixements aïllats. Responen a finalitats i propòsits determinats. Cal que, com a professionals de l'ensenyament, mostrem constantment la seva utilitat fora del propi camp.

És desitjable que els estudiants aprenguin com poden influir les matemàtiques en el seu futur professional. De fet, si nosaltres els mostrem de quina manera les matemàtiques els seran útils en els seus estudis i itineraris professionals, tindran més motivació i aquest fet repercutirà en benefici de la seva carrera.

Considero que cal preparar als estudiants per al futur professional, tocant més de peus a terra. La seva formació, per tant, ha de diferir de la tradicional que va més dirigida a comprendre conceptes abstractes i demostrar teoremes; coses molt convenients per a la formació de matemàtics, però innecessàries per als qui han d'aplicar la matemàtica.

Les inquietuds apuntades fins al moment suggereixen i justifiquen, per tant, la selecció d'un seguit de situacions més o menys properes a la realitat quotidiana dels nostres estudiants.

Es tracta, doncs, de donar una nova orientació al caràcter formatiu de les matemàtiques.

La innovació és essencial, i no és tan difícil com sembla. La dificultat no rau en la mateixa innovació, sinó en el que un vulgui o no vulgui innovar. Els processos innovadors han gaudit d'un paper destacat en la història. Es comença per la decisió d'una persona creativa de trencar amb el que fins aleshores s'ha considerat natural o comú per fer quelcom diferent. En primer lloc, per desenvolupar la creativitat cal fer-se preguntes sobre la situació present: ¿M'he esforçat prou? ¿La situació actual és la millor? ¿Podem millorar l'ensenyament? Aquest tipus de preguntes estimulen el debat i la creativitat: com més s'investiga, millors resultats s'obtenen.

Es tracta de situar l'ensenyament en un *status* que afavoreixi la creativitat, en lloc de la memorització i els recargolats algoritmes de càlcul.

Descripció de la documentació i de l'experiència

"La teoria que no trobi una aplicació pràctica en la vida quotidiana és una acrobàcia del pensament"
Swani Vivekananda

Proposta de la metodologia experimentada

Arran de les reflexions exposades en els apartats anteriors he extret una síntesi d'idees que han estat els fonaments per desenvolupar una experiència del que s'anomena modelització matemàtica com a eina d'ensenyament i que ha estat implementada a nivell universitari, en particular en estudis d'enginyeria tècnica. Enumero els trets principals:

1. Saber matemàtiques no equival a saber aplicar-les.
2. La modelització matemàtica –és a dir, la construcció i exploració de models matemàtics associats a situacions no matemàtiques– s'ha de pensar com una activitat dirigida i encarada a objectius d'interès per a l'estudiant.
3. Un model matemàtic pot entendre's com una manera simplificada de determinades situacions de la realitat.
4. La construcció d'un model es fa per obtenir respostes concretes d'un cert tipus de qüestions envers el fenomen analitzat.

El diàleg matemàtica-realitat constitueix un dels aspectes a destacar en el procés de modelització matemàtica i en aquest diàleg hi participen molts avenços, interrogants i revisions de les ciències.

1. La matemàtica tendeix a ser vista com una font d'eines per modelar.
2. La noció de model matemàtic té un paper vital en diverses àrees de la ciència. La construcció d'un model suposa dos aspectes fonamentals:
   i) interpretar la situació
   ii) construir aquesta interpretació en termes matemàtics formals.

Concretament, la modelització matemàtica és un procés que condueix a convertir una situació de la realitat en un problema de matemàtiques, de manera que resolent-lo s'aconsegueixi una solució o com a mínim un bon coneixement de la situació. A partir d'aquí no hi ha cap dubte que la modelització matemàtica ha de ser una metodologia que cal incloure en l'ensenyament de les matemàtiques.

La proposta, avalada per experiència desenvolupada, pretén oferir una via diferent, una alternativa a l'ensenyament tradicional, tot apostant per una modificació del procés d'aprenentatge.

Cal preparar els alumnes per al món d'avui i de demà en el qual ells s'hauran de moure. Això obliga a pensar quina és la manera més eficaç d'ensenyament.

Considero que no només cal debatre els continguts, sinó la metodologia per assolir els continguts, canviar l'escenari o el marc on es mouen els conceptes (marc pràctic, marc matemàtic).

L'estat actual del modelatge com a eina d'ensenyament està internacionalment força arrelat i àmpliament consensuat; només cal fer una ullada a Internet per tenir una idea de l'estat actual del tema. De fet, si cerquem a Internet continguts amb les següents paraules clau: *"modelling", "education", "mathematical"* per tal de trobar informació sobre el modelatge matemàtic i l'educació, amb Google trobem tal com mostra la figura un total de 4.110.000 documents. Xifra prou significativa.

Ratifico que l'experiència està focalitzada en la innovació docent i en la seva validació i eficàcia. Cal tenir en compte que no formem futurs matemàtics, sinó futurs ciutadans.

Com a element de reflexió es presenten les directrius de treball basades en la modelització amb el fi de resoldre aquests fets. Les eines per desenvolupar aquest procés seran el disseny de la recerca, mètodes, tècniques i tàctiques d'aprenentatge. Una de les tàctiques usades és la que anomeno **unitats didàctiques**: treballs que els alumnes han fet individualment dins de les aules, amb l'objectiu d'aprendre els conceptes matemàtics per construcció del model a partir d'una situació usual en llurs estudis; **l'altra és el treball en projectes**: pràctiques efectuades en grup, fora de les aules, amb l'objectiu de treballar models matemàtics i interpretar situacions usuals en la vida professional del futur tècnic.

Cal aclarir que el modelatge matemàtic és la construcció i recerca de models més o menys complexos i el modelatge didàctic és l'aprenentatge de les matemàtiques a partir de models.

Les fases del modelatge matemàtic es podrien enumerar, doncs, de la manera següent:

1. Especificació del problema tècnic o situació quotidiana.
2. Elecció de les eines adequades per traduir en termes matemàtics la situació.
3. Construcció d'un model.
4. Formulació del problema matemàtic.
5. Resolució del problema matemàtic.
6. Interpretació i anàlisi de la solució.

Es tracta d'explicar conceptes matemàtics a través de problemes i situacions tècniques.

El fet més rellevant és el disseny de material propi d'aprenentatge (pràctiques, CD-ROM, exercicis…); el material dissenyat és totalment innovador i dirigit a millorar la qualitat docent. El material i la metodologia exposada proporcionen –tal com es mostra– un elevat grau d'aprenentatge i acceptació per part dels nostres estudiants.

La creació de les unitats didàctiques

Els objectius pedagògics queden plasmats en els següents punts:

1. En una primera fase es presenta una situació física senzilla. A partir de diverses activitats suggerides a l'alumne es pretén que, amb un mínim de coneixements de secundària, aconsegueixin construir el model matemàtic de la situació plantejada i aprenguin conceptes matemàtics que els siguin útils.
2. En una segona fase l'objectiu és que resolguin el problema en termes matemàtics i que tot seguit interpretin el resultat en termes tècnics.

Aquestes unitats didàctiques es presenten de forma que tractin temes d'actualitat, que siguin atractives i suggeridores per a l'alumne, per tal que pugui arribar a resoldre-les d'una manera amena, i alhora que l'estudiant es motivi per aprendre nous conceptes matemàtics que ell mateix anirà construint.

Les unitats didàctiques que es proposen són un exemple d'aquest modelatge, i tenen la peculiaritat que van adreçades a alumnes d'enginyeria tècnica.

Al final de cada unitat s'inclou un seguit de preguntes on es demana a l'alumne que contesti "Què ha après i quines dificultats ha trobat". D'aquesta manera podem localitzar millor les deficiències en el procés d'aprenentatge i corregir i millorar les unitats per tal que el procés d'ensenyament sigui més lúcid. Cal indicar que les unitats didàctiques es realitzen en hores de classe i dins les aules, on les explicacions del professor són purament complementàries; en les exposicions a classe, el professor es permet d'explicar conceptes nous tot relacionant-los amb les situacions plasmades a la unitat.

Una manera d'avaluar els coneixements que ha adquirit l'alumne és suggerir una situació anàloga a l'estudiada (que pot ser al final de l'activitat com a complement), i valorar si han entès la utilitat dels conceptes matemàtics que li han estat ensenyats de manera que puguin interpretar situacions diferents que tinguin el mateix model.

El treball en projectes

Pel que fa als treballs en projectes, es presenten també situacions usuals de la tècnica en les quals els alumnes, individualment o en grup, hagin d'analitzar la situació, decidir amb l'ajut del professor quina informació cal recopilar, després reunir i analitzar la informació, investigar les relacions i ponderar el valor pràctic dels resultats obtinguts, per tal de poder aclarir la situació i resoldre problemes que s'hi refereixin. A diferència de les unitats didàctiques, els treballs en projectes no són elaborats a classe.

El treball en grup. Una característica dels projectes.

A més, hi ha un component pedagògic diferent de l'anterior, un component de recerca: l'estudiant ha de recollir informació per tal de desenvolupar les activitats que li són proposades, d'aquesta manera es pretén que l'alumne prengui contacte amb el món extraacadèmic i s'espavili per recollir informació en el context real –fet usual en tot professional.

Finalment, els resultats dels projectes són defensats a classe on es debaten les qüestions tractades.

El treball en projectes és un complement a les unitats didàctiques. La idea de projecte va estretament lligada al procés de modelització. El punt de partida és la presentació d'una situació no matemàtica susceptible de ser formulada en termes matemàtics. Els estudiants tenen un problema a les mans que han de modelar i resoldre. L'única informació de què disposen és una bibliografia i el context on s'ha desenvolupat la situació presentada. Tot seguit s'inicia un procés de recerca per part dels estudiants que, molt sovint, necessitaran l'ajut del professor. Els projectes defensats a classe són també una bona eina d'avaluació.

Els objectius principals de la realització d'un projecte els podem resumir en els següents punts:

a) Els alumnes han de ser capaços de relacionar els coneixements matemàtics i les habilitats adquirides amb les situacions presentades, i d'aquesta manera saber usar la matemàtica per a fins pràctics. És a dir, han de ser capaços d'apreciar el paper de la matemàtica en situacions complicades, com un mitjà per resoldre els problemes que se li plantegen.
b) Els alumnes han d'estar preparats per utilitzar més endavant, en la vida diària, elements matemàtics com ara taules, manuals, gràfics, revistes tècniques, programari, etc. En aquest sentit, el treball en projectes té un paper molt important.
c) Els alumnes han d'estar preparats per utilitzar com a eines temes i idees matemàtiques noves, en el sentit que a l'escola no els van ensenyar de manera explícita i sistemàtica.

Ratifico que la metodologia adequada i l'estructura del treball en projectes parteix de la filosofia que sintetitzo en les següents fases:

1. Presentació als alumnes de situacions tècniques properes a la vida professional.
2. Anàlisi de la situació per part dels alumnes individualment o en grup.
3. Decisió de la informació a recopilar per tal de modelar el problema.
4. Recopilació i anàlisi de la informació.
5. Desenvolupament del procés teòric de modelització del problema.
6. Resolució del model trobat i interpretació dels resultats.

La idea de projecte sorgeix a inicis del segle xx amb els suggeriments de John Dewey (1938) que afirma "que s'aprèn fent". L'alumne és el protagonista, esdevé actor del seu propi aprenentatge, amb l'objectiu que a través del seu desenvolupament en aquest tipus d'activitats assoleixi un grau de resultats significatius per al seu aprenentatge. Podríem dir que el treball en projectes és *la tecnologia que permet abordar problemes realistes i ajuda a produir respostes també realistes a noves situacions.*

El format de presentació dels projectes s'estructura com segueix:

0. Portada: cal incloure el títol i el nom dels estudiants que realitzen el projecte.
1. Índex.
2. Explicació detallada de la situació i el model.
3. Resolució del problema proposat.
4. Mètodes matemàtics: cal incloure una llista dels conceptes matemàtics utilitzats.
5. Conclusions: ha d'incloure el resum dels descobriments fets i els comentaris sobre les limitacions.
6. Recursos: ha d'incloure la relació dels llibres consultats i ajuts obtinguts.

Una experiència a la Universitat: descripció de l'experiència

"Educació és allò que queda quan s'oblida allò que es va aprendre a l'escola." A. Einstein

En aquest apartat presento l'experiència realitzada d'ensenyament/aprenentatge on es mostra la viabilitat de l'anomenat modelatge com a eina d'ensenyament i els instruments d'avaluació –tant dels estudiants com de la metodologia. L'experiència està desenvolupada en ensenyaments tècnics universitaris de grau mig i el context és l'Escola Politècnica Superior d'Enginyeria de Vilanova i la Geltrú de la Universitat Politècnica de Catalunya (UPC). A la UPC, com a centre de tradició de caire aplicat, les matemàtiques hi tenen un paper rellevant i per tant cal treballar en problemes reals i en les seves connotacions en el futur professional dels estudiants que hi cursen els estudis.

L'estructura del curs, habitualment de quatre mesos de durada, s'organitza implementant unitats didàctiques i projectes. Els treballs realitzats són exposats i defensats públicament el darrer dia de classe. Durant el curs es recullen i s'enregistren (de forma escrita i en suport vídeo) els comentaris i opinions dels estudiants per tal de validar el grau d'aprenentatge assolit, les seves produccions acadèmiques i alhora millorar les pràctiques realitzades. Aquests indicadors serveixen per analitzar no només l'eficàcia de la metodologia sinó també per avaluar als estudiants. Detallaré algun instrument d'avaluació:

Instruments d'avaluació

Unitats didàctiques

Per avaluar les unitats didàctiques i alhora millorar-les per posteriors edicions, s'inclou al final de la unitat una graella amb els següents ítems i format:

Activitat	*Teoria*	*Significat*	*Dificultats trobades*	*Grau de coneixement (Molt bé / Bé / Regular / Insuficient)*
Activitat 1				
Activitat 2				
Activitat…				

Formulari

Per tal de desenvolupar un procés eficient per mesurar el nivell d'aprenentatge, és fonamental usar en l'avaluació de seguiment un petit formulari que s'entrega a cada estudiant al final de cada tema. Aquesta eina ens permet obtenir informació cognitiva i epistemològica dels conceptes treballats.

Nom: Tema:

Data inici: Data final:

1. ¿Quins creus que són els punts més importants del tema?
2. ¿Creus que tenen alguna utilitat?
3. Detalla els aspectes que han quedat clars.
4. Detalla els aspectes que han quedat foscos.
5. Pel que fa a l'ensenyament, ¿creus que la forma d'exposar el tema té alguna diferència amb l'ensenyament tradicional?
6. Creus que el que has après té utilitat en els estudis actuals de batxillerat, o fins i tot en la teva futura vida professional?

El projecte

El projecte, tal com he apuntat anteriorment, es desenvolupa en grup i és defensat a classe. Aquest fet comporta afegir nous arguments per tal de justificar el treball en grup, fonamentats en els següents objectius:
– Maximitzar l'aprenentatge dels membres que configuren el grup.
– Proporcionar als membres del grup l'estímul, la possibilitat i l'oportunitat d'aprendre.
– Aprendre què representa el treball en equip mitjançant l'experiència conscient de desenvolupar aquest tipus de treball.

Introduir mètodes d'aprenentatge basats en el treball en projectes no és una tasca senzilla. En especial, quan els alumnes estan acostumats a mètodes tradicionals centrats en el professor i orientats cap als continguts, és probable que els estudiants requereixin algun temps per tal d'adaptar-se al nou model d'aprenentatge.

Les principals dificultats han estat, inicialment, jutjar quant de temps poden durar les pràctiques, la formació dels grups per a la reflexió i els debats posteriors. També he notat la poca predisposició d'alguns alumnes, en el sentit que són més conservadors que el professor. És a dir: alguns són reticents a nous mètodes, car això comporta més implicació activa, més compromís i més responsabilitats.

En cada projecte s'inclou una graella d'avaluació que omple el professor i que serveix per obtenir informació del procés d'aprenentatge dels estudiants. El format és com segueix:

Criteris i graella d'avaluació	*Molt baix*	*Baix*	*Mitjà*	*Alt*
A. Disseny global				
1. Recerca d'informació				
2. Extensió i aprofundiment				
B. Contingut matemàtic				
3. Formulació matemàtica				
4. Rigor del llenguatge				
5. Habilitat en la resolució i interpretació				
6. Correcció en els resultats				
C. Claredat				
7. Explicacions clares i precises				
8. Estructura, organització i presentació				
D. Actitud científica				
9. Esperit de recerca				
10. Matematització de situacions				
E. Altres				
11. Conclusions i comentaris				
Puntuació final				

El primer punt ens facilita informació en aspectes de comprensió i interpretació de la situació; el segon criteri serveix per avaluar les habilitats i els instruments utilitzats; en el tercer punt recollim informació sobre la capacitat de síntesi de l'estudiant en l'elaboració d'informes. Seguidament, s'avalua la capacitat d'investigació de l'estudiant i la relació teoria-realitat plasmada en el projecte. Finalment, avaluem les aportacions generals que han fet els estudiants.

Càlcul de la qualificació final

Disposem del següent quadre-resum *(fitxa de l'estudiant)* per tal de plasmar el resultat de l'avaluació formativa que s'esdevé de totes les activitats realitzades d'avaluació de seguiment: unitats didàctiques, els projectes i l'exposició pública, observacions objectives realitzades pel professor en entrevistes i en l'observació a classe. Aquest quadre l'emplena el professor a partir de la informació recollida per tal d'oferir el resultat de l'avaluació.

Nom: Qualificació numèrica final:
Procedència: ❑ Altres centres ❑ Repetidor
Coneixements previs:
Unitat didàctica I: Dificultats trobades: Suggeriments/aportacions: Què ha après:
Unitat didàctica II: Dificultats trobades : Suggeriments/aportacions: Què ha après:
Projecte: Dificultats trobades: Suggeriments/aportacions: Què ha après:

Relació d'algunes pràctiques dissenyades i experimentades de modelització

"El modelatge és l'art d'aplicar les matemàtiques a la vida real" Mogen Niss

Les pràctiques de modelatge i la consegüent anàlisi i evolució del procés d'aprenentatge s'ha desenvolupat des del curs 1998-99.

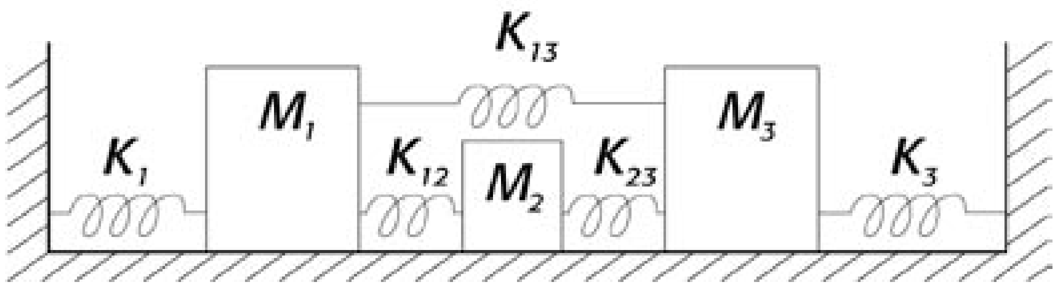
Mostrarem algunes pràctiques que s'han experimentat aquest darreres cinc anys a les aules i posteriorment presento la validació i eficàcia de la metodologia avalada pels comentaris dels estudiants i pels instruments d'avaluació utilitzats.

1. Modelatge d'un sistema de ressorts

Inicialment, l'objectiu principal consisteix que a partir de situacions regulades per la llei de Hooke, amb un únic ressort i una massa, l'estudiant descobreixi l'esmentada llei com una relació lineal entre la força i el desplaçament.

En una segona activitat s'afegeixen més ressorts i més masses; l'objectiu a mig termini és aconseguir que l'alumne modelitzi la llei de Hooke en diverses variables com un model lineal anàleg a l'anterior. D'aquesta manera, descobreix el concepte de matriu i les seves operacions i propietats més rellevants com a models necessaris per estudiar el moviment del sistema de ressorts.

En una tercera fase, es presenta un problema usual de l'àrea de mecànica tècnica per tal d'estudiar-lo i posteriorment interpretar el comportament físic de la situació. Tot seguit mostro l'esquema presentat:



L'objectiu final és que reconeguin i interpretin situacions diferents a les estudiades que comparteixin el mateix model. D'entre elles destaquen les aplicacions a circuits elèctrics. Detallo l'esquema:

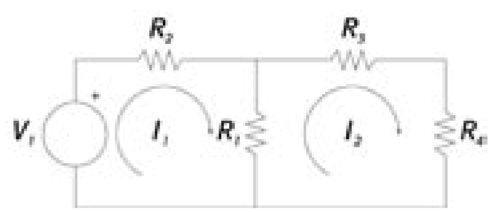
Existeix un paral·lelisme entre la llei de Hooke i la llei d'Ohm.

Ambdues són expressions de tipus:

$$A = B \cdot C \text{ en el cas que } \begin{cases} A = V \quad C = I \Rightarrow \text{Llei d'Ohm} \\ A = F \quad C = x \Rightarrow \text{Llei de Hooke} \end{cases}$$

Vegem els següents esquemes paral·lels:

Suposem el següent circuit:



Si plantegem les equacions:

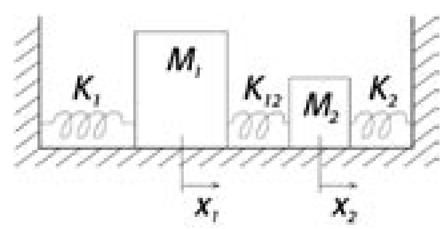
$$V = (R_1 + R_2) \cdot I - R_2 \cdot I_2$$

$$0 = -R_2 \cdot I_1 + (R_2 + R_3 + R_4) \cdot I_2$$

Matricialment:

$$\begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

Suposem el sistema de ressorts:



Si plantegem les equacions:

$$f_1 = -K_1 \cdot x_1 + K_{12} \cdot (x_2 - x_1)$$

$$f_2 = -K_{12}\,(x_2 - x_1) - K_2 \cdot x_2$$

Matricialment:

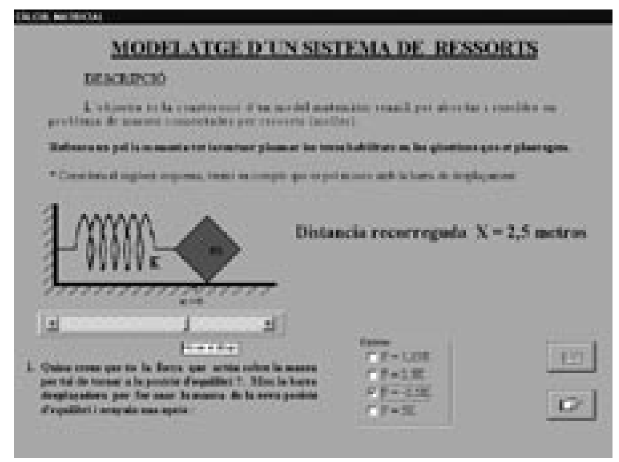
$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(K_1 + K_{12}) & K_{12} \\ K_{12} & -(K_{12} + K_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Observem la semblança entre els dos problemes.

Els estudiants aprenen d'una forma dirigida i entretinguda la necessitat del càlcul matricial com a eina per resoldre problemes del seu entorn i alhora adquireixen un cert grau de motivació per les seves aplicacions.

La unitat finalitza suggerint situacions d'economia, xarxes de circulació vial i problemes geomètrics entre d'altres.

Cal destacar que aquesta unitat –va ser la primera que es va dissenyar– s'ha millorat tot realitzant diferents versions i s'ha experimentat –amb les modificacions adients– fins a l'actualitat. Com a fet rellevant, a hores d'ara s'està desenvolupant en suport magnètic, de manera que els estudiants fixen ells mateixos les unitats de mesura.



2. El món de les equacions diferencials

El principal objectiu és que els estudiants aprenguin per descobriment, partint de la idea de fer-los sentir la necessitat de l'aprenentatge, mostrant situacions on apareguin equacions diferencials lineals.

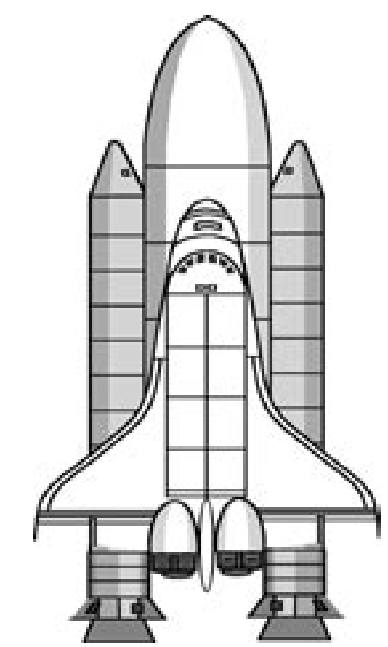
L'objectiu final és, com en el cas anterior, que reconeguin diverses situacions diferents extretes de la realitat, que comparteixin el mateix model matemàtic. Es pretén que d'una forma dirigida i atractiva construeixin les equacions diferencials involucrades i alhora les resolguin. Per això s'inclou també, en la unitat, una interpretació geomètrica de les solucions mitjançant el camp de pendents.

En el disseny, es presenta l'activitat a partir d'un article extret de la premsa que fa referència al projecte Columbia, on es comenta l'experiència de l'astronauta Miguel López Alegría en la seva estada de setze dies a l'espai. En una primera fase, amb aquesta presentació, es pretén motivar l'estudiant en l'estudi de les equacions diferencials.

Com a presentació, vegem el detall de la versió original d'aquesta unitat didàctica:

> Miguel López Alegría ha estat el primer astronauta espanyol que ha viatjat a l'espai. Dintre del transbordador espacial "Columbia" va estar setze dies fent voltes al nostre planeta (una cada noranta minuts) en una òrbita fora de l'atmosfera de la Terra.
>
> La NASA (National Aeronautics and Space Administration) va ser fundada al 1958 i només onze anys després va assolir amb èxit el seu primer objectiu: el 21 de juliol de 1969, d'acord amb la data prevista per Kennedy, els astronautes Armstrong i Aldrin, tripulants del mòdul lunar de l'Apolo 11, van aconseguir arribar a la lluna i retornar sans i estalvis a la Terra.
>
> Però els darrers objectius de la NASA han estat situar a l'espai nombrosos satèl·lits artificials (principalment de comunicacions) i realitzar certs experiments, fent servir el Columbia. El treball que havia de realitzar Miguel López Alegría, a més del pilotar, va consistir en l'estudi del moviment dels cossos en condicions de gravetat i densitat atmosfèrica diferents a les existents a la Terra.
>
> És indispensable, però, preveure els resultats d'aquests experiments per no córrer riscos innecessaris. Les condicions de diferent gravetat i densitat atmosfèrica es poden modelitzar matemàticament, i així obtenir uns resultats previs, òptims, als experiments que posteriorment portaran a terme els astronautes.

Activitat 0: Introducció

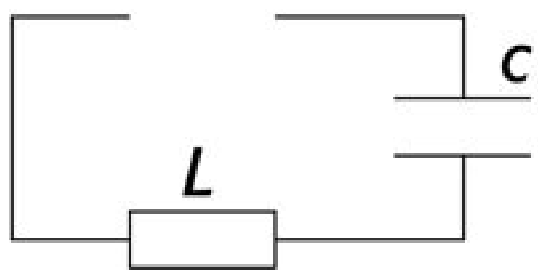


Transbordador espacial Columbia

A partir de l'article, els alumnes noten que les condicions de gravetat a la terra i en l'espai són evidentment diferents. Tot seguit i arran de les lleis físiques descobreixen l'equació diferencial lineal associada al moviment. És a dir, a partir d'una situació real, descobreixen les eines matemàtiques per resoldre-la i per tant veuen la necessitat d'aprendre matemàtiques i llur utilitat. A la unitat es presenten els mètodes de resolució de diversos tipus d'equacions diferencials (separació de variables, homogènies i lineals).

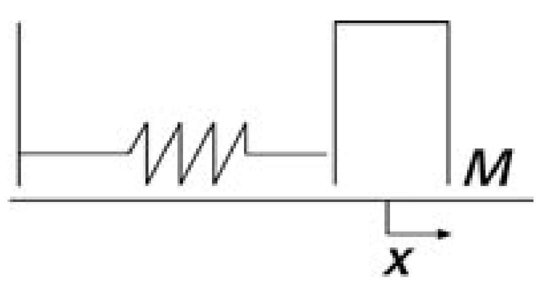
La pràctica acaba introduint l'equació diferencial de segon ordre amb coeficients constants partint de dues situacions usuals en el currículum del futur enginyer.

L'equació que descriu la càrrega que s'emmagatzema en les plaques d'un condensador de capacitat *C* quan el connectem en sèrie amb una resistència *R* i una bobina de coeficient d'autoinducció *L* és:



$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=0$$

Els alumnes descobreixen l'equivalència entre l'oscil·lador mecànic:



i el circuit mostrat LRC, esquematitzat pel quadre:

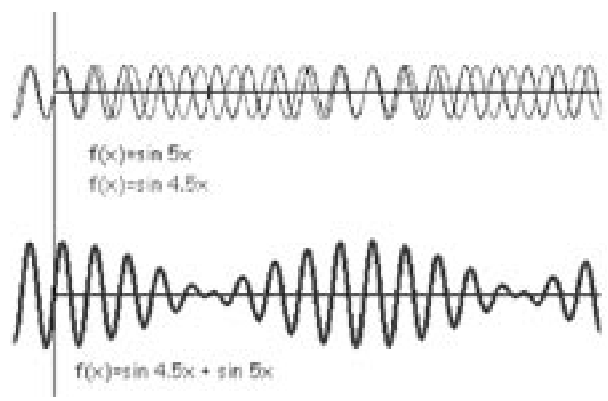
Oscil·lador mecànic		*Circuit LCR*	
Posició	X	Càrrega condensador	Q
Massa	M	Autoinducció bobina	L
Factor d'esmorteïment	B	Resistència	R
Cnt. Recuperadora	K	Invers de la capacitat	1/C

En general, resolen una equació del tipus $y'' + \alpha y' + \beta y = 0$ com a model compartit de les oscil·lacions mecàniques i elèctriques.

3. Fourier i els sons

En aquest treball s'analitza per què una paraula pronunciada per dos alumnes diferents té tonalitats diferents (la mateixa paraula). Els estudiants descobreixen d'aquesta manera el paper dels harmònics de Fourier. Els alumnes varen assistir a classe amb micròfons, cintes de casset, i fins i tot un d'ells va portar un ordinador.

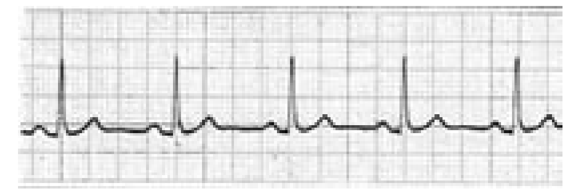
El departament de teoria del senyal ens va deixar diversos aparells per analitzar freqüències, fet que mostra el tarannà interdisciplinari dels temes tractats ja que involucra diverses àrees de coneixement.



Superposició de dos sons

4. Fourier i els electrocardiogrames

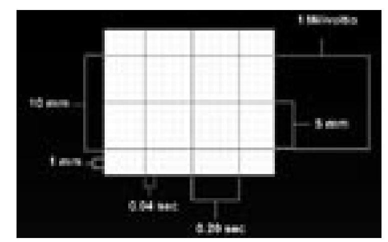
Aquest projecte mostra com a partir del desenvolupament de Fourier i els harmònics, el comportament d'un cor sa i d'un cor malalt són diferents. L'estudiant va mostrar transparències amb gràfiques reals d'un electrocardiograma d'un cor sa i d'un cor malalt.



Electrocardiograma real d'una persona sana de 40 anys

$$\begin{cases}
.2\sin(5.714285714\,\pi t + .2702702703\,\pi) - .1 & -t \le 0 \text{ and } t < .08\\
-2.5t + .25 & .08 - t \le 0 \text{ and } t < .1\\
0 & .1 - t \le 0 \text{ and } t < .14\\
-3t + .42 & .14 - t \le 0 \text{ and } t < .15\\
27.6t - 4.17 & .15 - t \le 0 \text{ and } t < .2\\
-35t + 8.35 & .2 - t \le 0 \text{ and } t < .23\\
-27.5t + 6.625 & .023 - t \le 0 \text{ and } t < .24\\
.55t - .108 & .24 - t \le 0 \text{ and } t < .33\\
2.91t - .8850 & .33 - t \le 0 \text{ and } t < .39\\
.2\sin(9.280742459\,\pi t + .6493506494\,\pi) + .1 & .39 - t \le 0 \text{ and } t < .44\\
.2\sin(1.428571429\,\pi t + .7369196758\,\pi) + 2.075 & .44 - t \le 0 \text{ and } t < .53\\
.35t - .114 & .53 - t \le 0 \text{ and } t < .6\\
-.25t + .25 & .6 - t \le 0 \text{ and } t < .8
\end{cases}$$

Característiques del paper



Simulació del gràfic utilitzant càlcul simbòlic

El grup d'estudiants (d'enginyeria electrònica) que va desenvolupar aquest projecte va efectuar diverses visites a cardiòlegs per tal d'obtenir mostres d'electrocardiogrames reals. La realització d'aquest treball ha suposat conèixer el funcionament dels aparells, les característiques del paper, l'ús de programes de matemàtiques de càlcul simbòlic per avaluar simulacions… Les principals produccions matemàtiques van ser l'aprenentatge de funcions periòdiques i llur interpretació, aproximacions trigonomètriques, aprenentatge del MAPLE… Vull destacar l'engrescament dels joves que van efectuar el treball alhora que aprenien matemàtiques en un entorn real. Com he dit, els projectes són defensats públicament i aquesta presentació és enregistrada en vídeo.

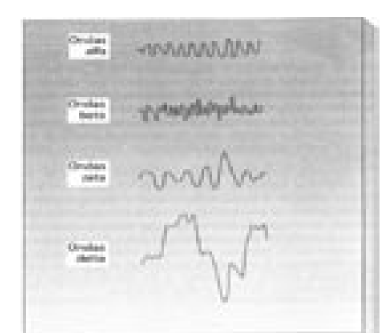
5. Mesurem el museu

Des de la finestra de l'aula s'observa el museu municipal Víctor Balaguer de Vilanova; un grup d'estudiants van considerar oportú proposar el càlcul del volum del museu. Jo vaig acceptar i tot seguit van anar a l'Ajuntament a buscar les mides. Els mateixos alumnes van cercar funcions (amb l'ordinador) que modelitzessin l'estructura per tal de poder calcular, mitjançant les integrals dobles, el volum del museu. Aquest fet va proporcionar als alumnes adquirir coneixements arquitectònics i matemàtics, i alhora aprenendre programes de càlcul simbòlic (en aquest cas el Mathematica).

Detall de la cúpula del museu

6. Aplicació de les sèries de Fourier en l'estudi encefalogràfic

Els estudiants varen aprendre no només conceptes de medicina, sinó també d'electrònica i de matemàtiques. A partir de l'estudi i interpretació de les gràfiques i mitjançant les sèries de Fourier i el comportament dels harmònics, s'en descobreix l'estat i la influència en determinar –conjuntament amb elements d'electrònica– l'estat de salut d'un pacient i alhora interpretar el tipus de gràfiques que hi apareixen. D'aquesta manera s'observa que el modelatge és una forma d'aprenentatge eficient.



Diversos tipus d'ones

7. Michael Schumacher i el càlcul diferencial

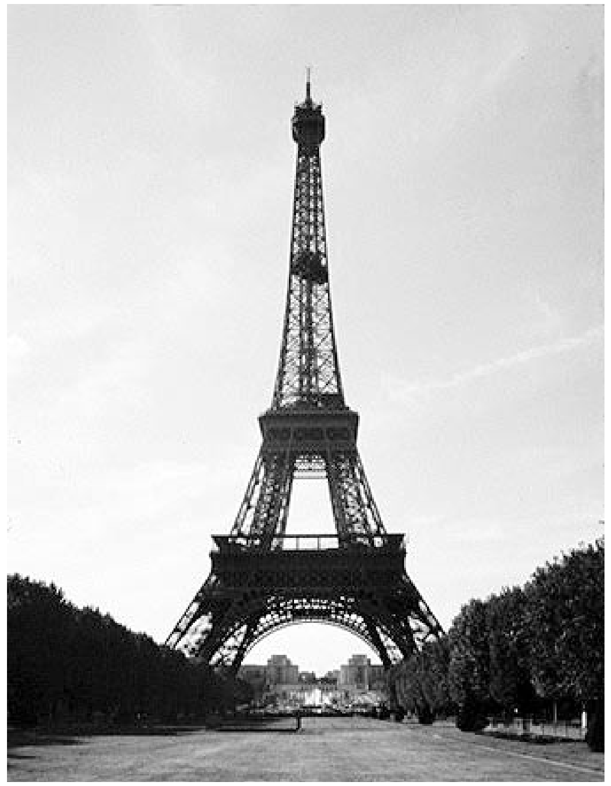
La idea va sorgir a partir d'un article publicat a *La Vanguardia*, on es presentava una carrera en el circuit de Montmeló.

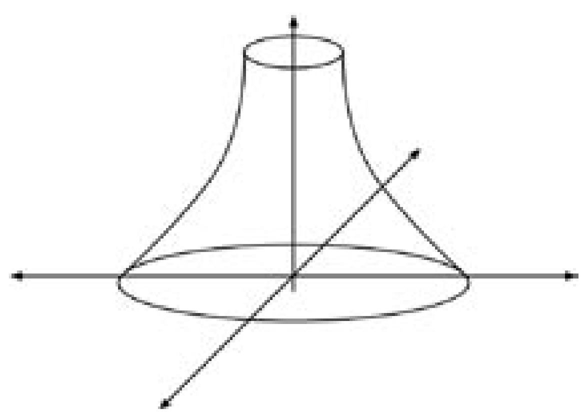
A partir d'aquí s'estableix com a objectiu estudiar l'article i investigar situacions reals amb la finalitat de descobrir quines matemàtiques hi ha en la tècnica. La situació neix de preguntar en quin moment el cotxe de fórmula 1 ha de desaccelerar per poder girar la corba a la màxima velocitat possible per tal de fer el recorregut del circuit amb el mínim temps possible.

El treball va consistir inicialment a construir una taula de velocitats –extreta d'unes voltes de reconeixement. A partir d'aquesta taula s'observa que la velocitat no és constant. També s'observa que Michael comença el recorregut deu metres més endavant del punt de sortida inicial. D'aquesta manera es dedueixen relacions entre espai-temps, que són anotades en una segona taula. Comparant les dues taules es construeix una tercera on apareixen els resultats anteriors de manera que la relació la podem expressar mitjançant derivades i integrals. Els alumnes que van realitzar el projecte destaquen "…fins avui desconeixíem les aplicacions de les matemàtiques en un context real, hem après multitud d'aplicacions de la derivada i la integral…". Aquest treball va ser motivador i engrescador per introduir els temes de derivades i alhora va ser de molta utilitat per als estudiants que tenien per primer cop un contacte amb aquests conceptes.

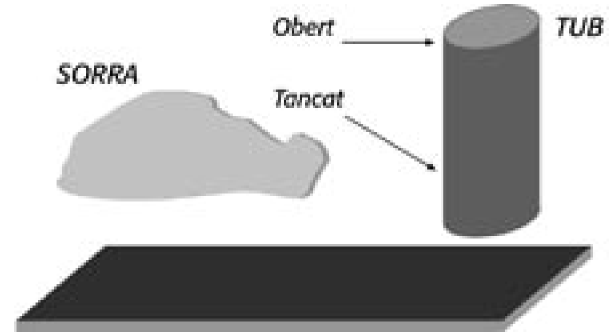
8. La torre Eiffel i el seu perfil

Els estudiants descobreixen el perfil de la torre Eiffel tot treballant amb un sac de sorra i modelitzant l'equació diferencial del mateix perfil. Aquest treball és dirigit a alumnes de nou ingrés. Vegem un detall de la pràctica:





Una torre com la del senyor Eiffel no es pot construir a corre-cuita. Cal, primerament, experimentar molt.
Doncs experimentem!
Per resoldre aquesta activitat, cal fer servir tant com es pugui la imaginació. Aquí hi ha el material necessari per fer les proves:



El tub és fet de goma elàstica: això vol dir que es pot eixamplar.

L'experiment consistia a omplir el tub de sorra fins dalt de tot, però sense pressionar-la, deixant-la caure pel seu propi pes; finalment, es demanava dibuixar el tub resultant.

9. Estudi d'un crèdit hipotecari

La idea del treball va néixer d'un petit passeig que vaig fer el primer dia de classe pels passadissos de l'escola. Vaig observar que en els taulons d'anuncis hi havia un petit cartell que oferia crèdits als estudiants per ajudar a pagar les matrícules.

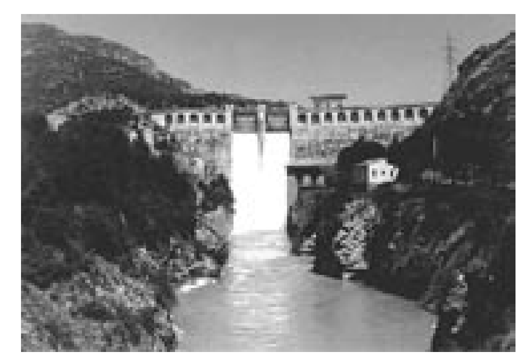
La meva pregunta va ser: ¿Els estudiants entenen els conceptes involucrats en l'anunci? ¿Saben prou matemàtiques per interpretar i calcular les quotes de la oferta? A partir d'aquest fet vaig donar a tots els estudiants de nou ingrés una còpia de l'anunci, entre d'altres anuncis de diverses entitats bancàries (extrets de la premsa) que també oferien préstecs. Cal destacar que per calcular les quotes és necessari conèixer el que s'anomenen progressions geomètriques. La meva sorpresa va ser que ningú sabia què volia dir TAE; com es calculaven les quotes en funció de la temporalització. Vull destacar que vaig quedar sorprès; tots els estudiants havien tingut en alguna etapa de secundària ensenyaments sobre conceptes de progressions geomètriques. Vaig notar que hi havia quelcom que fallava, potser els professors només els preparaven per passar uns exàmens i no els preparaven per ser ciutadans! Amb tot això es va realitzar un treball, per cert molt útil i enriquidor, en què els estudiants que el van desenvolupar varen aprendre a calcular les quotes, els conceptes involucrats i fins i tot a usar el programa Excel per aplicar-ho als casos exposats, i d'aquesta manera poder decidir quina oferta bancària els era més útil. Com a cloenda, va ser exposat a classe per tal de compartir les descobertes fetes amb els altres companys.

10. Estudi de la presa del pantà d'Oliana

L'objectiu era trobar el disseny òptim de la presa. Adjunto un detall del treball.

Dades de l'embassament:
Capacitat total: 101,1 hm^3

Dades de la presa:
Altura sobre ciments: 102 m
Longitud de coronació: 230 m
Tipologia: gravetat
Amplada de la base: 88 m



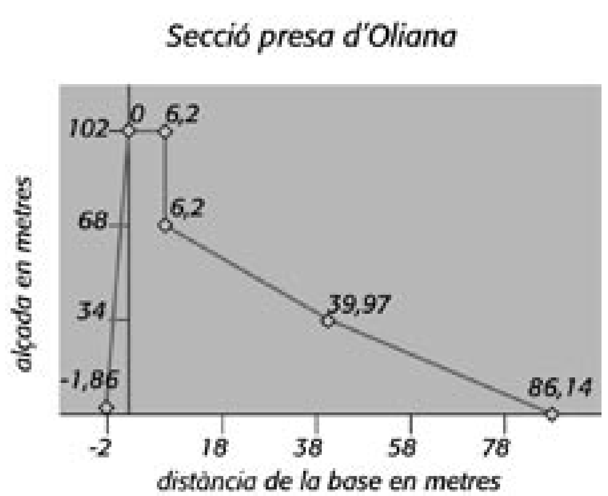
Presa d'Oliana (Lleida-Riu Segre)

Per fer els càlculs de l'àrea i el volum, agafarem la secció de la presa i buscarem una funció *f(x)* que modelitzi la secció en qüestió.

L'embassament d'Oliana fou construït per les forces hidroelèctriques del Segre aprofitant el grau d'Oliana, aigües amunt del castell, on el Segre, després de recórrer des del coll de Nargó, aporta un cabal mitjà de 30 m^3/s. El salt, amb una potència instal·lada de 52.500 KW, té la finalitat de regular els cabals del riu avall evitant les inundacions i assegurant els regs dels canals d'Urgell. Pel que fa a la presa es va acabar de construir l'any 1959 amb una capacitat total de 101,10 hm^3. L'aportació mitjana actual d'aigua es de 1.013 hm^3 i ocupa una superfície inundada de 443 ha.

A partir de la secció de la presa podem mesurar l'alçada sobre els ciments, que és de 102 m, i la seva amplada, que és de 88 m de base. La cota de coronació es troba a 519 m i és una presa de tipus gravetat (que pel seu propi pes pot aguantar l'aigua). També té un desguàs per la part superior, per si vessés la presa, de 2.000 m^3/s i per la part del fons un desguàs de 125.000m^3/s.

Tot seguit es calcula quina és la superfície de la secció de la presa; o sigui, l'àrea.



$$f(x)=\begin{cases} 0{,}012\cdot x + 2{,}25\cdot x + 104{,}77 & 86{,}14 \geq x \geq 6{,}2 \\ 102 & 6{,}2 > x > 0 \\ 54{,}84\cdot x + 102 & 0 \geq x \geq -1{,}86 \end{cases}$$

Per fer-ho necessitem trobar una funció *f(x)* definida a trossos, i per calcular l'àrea integrem la funció en cada interval i sumem els resultats. S'obté 3.353,92 m^2.

¿Quant ens ocuparan els materials que s'utilitzen per construir la presa –per exemple formigó armat? (calculem el volum).

Per trobar el volum agafem l'àrea ja calculada i només li hem de multiplicar la longitud de coronació. *L*=268 m i tenim *V*=898.850,75 m^3. Cal saber també la força que fa l'aigua a la paret de la presa, i poder treure les conclusions de quina és la millor forma per construir la presa. Per això només cal resoldre un problema elemental de dinàmica.

Sabem que la força depèn de la pressió de l'aigua, i aquesta no és la mateixa a la part de dalt que en el fons, ja que la pressió depèn de la densitat de l'aigua, la gravetat i l'alçada. I per altra banda la *F=P*S*, per tant també hem de saber quant val *S*, que és la longitud de coronació pel diferencial de *H* (alçada).

Com que no podem calcular la força de manera directa, fent *F=P*S*, perquè com hem dit la pressió no és la mateixa en tots els punts, agafarem làmines d'aigua i calcularem la força de cada trosset. O sigui, no és res més que fer una integral definida en funció de l'alçada.

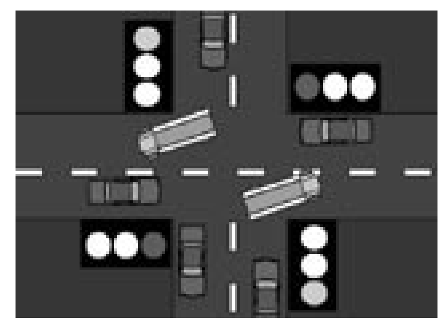
La *F* serà integral de *dF* per a *h*=0 fins a *h*=74 m. El resultat de fer els càlculs és de 7.191.083.200 N.

Conclusió: atès que la força actua sobre una capa elemental d'aigua i la presa és proporcional a la profunditat de l'aigua, llavors ha de dissenyar-se de tal forma que sigui més ampla al fons.

11. Modelització d'una cruïlla regulada per semàfors

El projecte va consistir a estudiar una cruïlla regulada per semàfors de la ciutat de Mollerussa (Lleida) amb l'objectiu d'avaluar d'una manera òptima el flux de vehicles. Els principals objectius del projecte van ser:

1. Explicar el mecanisme d'una intersecció regulada per semàfors.
2. Recollir dades experimentals.
3. Raonar el funcionament a partir de dades experimentals.
4. Deduir equacions matemàtiques que modelen el funcionament.
5. Explicar el funcionament de la intersecció. Els ítems del treball han estat:
   a) Escollir una intersecció real regulada per semàfors per estudiar l'evolució del trànsit. En aquest cas, de la ciutat de Mollerussa (Lleida).
   b) Analitzar la densitat de trànsit realitzant mesures experimentalment del flux de vehicles. Construir una maqueta física i simular en Flash el trànsit de vehicles.



   c) Establir l'analogia entre els elements clàssics de la teoria de circuits i les característiques del trànsit que circula per la cruïlla. Treballar les lleis de Kirchoff.
   d) Mostrar resultats com una primera aproximació al problema de la gestió del trànsit. S'ha treballat amb dades reals extretes de les mesures realitzades a la cruïlla.

La intersecció està ubicada a la N-II al seu pas per Mollerussa (Lleida). Els carrers són Ferrer i Busquets, avinguda de Catalunya, i per últim el carrer de l'Abat Oliva.

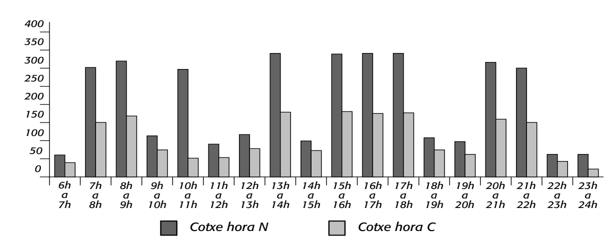
Foto corresponent a la intersecció:

De l'experimentació *in situ* es pot obtenir una estimació dels cotxes per hora.

Mitja	*Cotxes N*	*Cotxes C*
Hora Punta	326	163
Hora Mitja	103	67
Hora Baixa	63	34

$$\text{Mitjana} = \frac{\sum \text{núm. cotxes\_franja\_horaria}}{\text{núm. franjes\_horaries}}$$

Representació de la gràfica del nombre de cotxes que passen cada hora tan pel carrer principal *(N)* com pel carrer secundari *(P)*.



Càlcul del temps d'àmbar dels semàfors del carrer *N*:

Suposant un vo=50 km/h (ja que és la velocitat màxima dins de població), un temps de reacció de 0,5 s, una desacceleració de -0,5 g i una amplada de la intersecció de 14 m, tenim que el temps en àmbar de *N* és:

$$T_{\grave{a}mbar} = 0{,}5s - \frac{13{,}89m/s}{2(-0{,}5 \cdot 9{,}8\,)m/s^2} + \frac{14m}{13{,}89m/s} = 2{,}925s \approx 3s$$

I el temps d'àmbar pels semàfors situats al carrer *C*, que te una amplada d'onze metres.

$$T_{\grave{a}mbar} = 0{,}5s - \frac{13{,}89m/s}{2(-0{,}5 \cdot 9{,}8\,)m/s^2} + \frac{11m}{13{,}89m/s} = 2{,}709s \approx 3s$$

Càlcul del número màxim de cotxes.

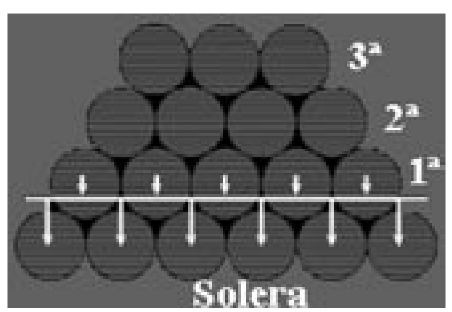
$$N_{max} = \frac{1}{t_r - \frac{v}{4 \cdot a} + \frac{l}{v}} = \frac{1}{1{,}51} = 0.662cotxes/s = 2383'2cotxes/hr$$

Fem notar que el resultat d'aquests càlculs són totalment empírics, ja que en la realitat és impossible que circulin tants vehicles per aquestes vies. Tot seguit detallo les explicacions que els estudiants varen fer el dia de la presentació en vídeo transcrites literalment: "En aquest projecte hem pogut entendre d'una forma molt clara el funcionament d'una intersecció regulada per semàfors. Sense tenir unes fórmules molt complicades d'entendre sinó que amb una part de lògica es poden arribar a deduir. Hem aconseguit trobar uns temps de semàfor i dir que són uns temps bastant aproximats al que és la realitat dels semàfors. Per una altra part ens hem introduït en dos mons que sense formar part de les matemàtiques hem utilitzat per poder desenvolupar el nostre projecte. Un d'ells és el món del Flash de Macromedia. L'hem fet servir per entendre i fer una explicació més aclaridora del funcionament d'una cruïlla, ja que visualment tot sembla molt més fàcil. I l'altre consta de la part de l'electrònica programable, en definitiva el molt dels microcontroladors; ara tot és basa en els ordinadors i aquest és un bon inici per entendre'ls internament. Això ens serveix per fer la simulació a un lloc on no tinguem la possibilitat d'ensenyar-ho a través d'un ordinador, tot i que no passen cotxes com en el Flash. Un projecte que ens ha sigut útil per poder entendre uns conceptes que mig teníem però no els havíem portat a terme."

Aquest projecte mostra una visió diferent de l'ensenyament de les matemàtiques que considero prou rellevant: explicar no vol dir ensenyar. Els estudiants han après les implicacions de les matemàtiques amb el món quotidià. La motivació i el grau d'engrescament que varen viure els estudiants que han fet aquest projecte és molt enriquidor.

12. Mètode de la Solera

L'anomenat "mètode de la solera" consisteix a elaborar el vi de Xerès i és una situació que ens remet a l'estudi de les sèries numèriques. El vi més vell està situat a la fila inferior de barriques i el més nou en el pis de més amunt. Cada any, la meitat del contingut dels barrils que toquen a terra es posa en ampolles com a vi de xerès i s'omple amb vi de la fila immediata superior. El procés es completa afegint vi novell als barrils de la filera de més amunt. El problema és la recerca d'un model matemàtic que ens determini la quantitat de vi de *n* anys que s'extreu de *k* fileres de barrils (Larson, 2003. *Cálculo I).*



Els estudiants varen fer una simulació d'extracció de vi segons mostra la taula:

	Fila barriques 0	Fila barriques 1	Fila barriques 2	Fila barriques 3	Fila barriques 4	Fila barriques 5
Any inicial	1	0	0	0	0	0
[illegible] 1	1/2	1/2	0	0	0	0
[illegible] 2	1/4	1/2	1/4	0	0	0
[illegible] 3	1/8	3/8	3/8	1/8	0	0
[illegible] 4	1/16	[illegible]	3/8	[illegible]	1/16	0
[illegible] 5	1/32	5/32	5/16	5/16	5/32	1/32
[illegible] 6	1/64	3/32	15/64	5/16	15/64	3/32
[illegible] 7	[illegible]	7/128	21/128	35/128	35/128	21/128
[illegible] 8	...	...		...	...	...
[illegible] 9	...	...	...	...	...	...
[illegible] 10	...	...	...	...	...	...
[illegible] 11	...	...	...	...	...	...

I un cop traduït al llenguatge matemàtic s'obté el patró plasmat a la taula:

[illegible]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Els alumnes varen deduir que l'expressió que determina la quantitat de vi de *n* anys que s'extreu de *k* fileres de barrils és:

$$f\,(n,\,k) = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n} \quad per\ k<n$$

Aquest és un altre exemple de modelització que ens permet presentar els temes de matemàtiques de manera diferent a la tradicional i que en mostra el component epistemològica.

Resultats obtinguts de l'experiència

Opinions dels estudiants vers l'experiència

Per tal de validar la metodologia emprada plasmaré algunes opinions dels estudiants que n'avalen la viabilitat. Les opinions que adjuntem són fruit de les enquestes i qüestionaris que he utilitzat com a instruments de recerca per tal d'avaluar el rendiment acadèmic i l'eficàcia de la metodologia. Vegem, doncs, què hi diuen els estudiants en aquest recull d'il·lustracions extretes dels seus quaderns i que crec que són prou significatives.

2) Santiago Gómez Poveda (FP):
- Opinió: "Las matemáticas que me han suministrado porque esto es como los hospitales ellos te conectan el suero sin tú saber para lo que es, son unas matemáticas para mí inútiles ya que solo las he aplicado para sumar o restar cuando voy a comprar, o a la hora de partir un pastel que eso siempre te lo enseñan bien ya que siempre es el mismo ejemplo"

Las matemáticas que me han suministrado, porque esto es como los hospitales ellos te conectan el suero sin tú saber para lo que es, son unas matemáticas para mí inútiles ya que solo las he ~~[illegible]~~ aplicado para sumar o restar cuando voy a comprar o a la hora de partir un pastel que eso siempre te lo enseñan bien ya que siempre es el mismo ejemplo.

Santiago

4) Cesar Gutierrez Amigo (COU):
- Opinió: "Han sido unas matemáticas excesivamente "mecanizadas", es decir, sigue siempre unos pasos para llegar a la solución y absorve los conceptos, pero no importa lo que son ni para que sirven."
- Utilitat: "Indudablemente han de tener aplicaciones, pero de la mayoría de cosas que he estudiado (e incluso aprobado) no se cuales son."

Han sido unas matemáticas excesivamente "mecanizadas", es decir, sigue siempre unos pasos para llegar a la solución y absorve los conceptos, pero no importa lo que son ni para que sirven.

Cèsar

Però amb aquest projecte em après que realment les matemàtiques tenen una aplicació material a la vida i això de dir-se aplicades no és un simple nom.

Raquel

Personalment penso que es molt més efectiu aprendre matemàtiques fent problemes reals que no pas exercisis i exercisis a dosser. Clar que això es com aprendre a conduir,

Anna

Crec que he aprés a perdre eh por a les matemàtiques, és a dir, no agafar-les com un conjunt de regles que agafen per ser obligades 3 dies més tard, crec que

Iván

6. Creus que el que has après té utilitat en els estudis actuals, o fins i tot en la teva futura vida professional?

SÍ, PQ HE VISCUT L'EXPERIÈNCIA DE PARLAR EN GRUP I FER ENTENDRE EL MEU TEMA.
HE APRÉS ALTRES TÈCNIQUES, FINS ARA NO CONEGUDES NI EXPERIMENTADES PER MI.

7. Altres elements que vulguis comentar.

CONSIDERO QUE S'HAURIA D'IMPOSAR AQUEST SISTEMA D'EDUCACIÓ A ALTRES ASSIGNATURES. PQ ÉS A L'EXPLICACIÓ D'UN TEMA QUAN L'ALUMNE S'ESFORÇA REALMENT PER FER-HO BÉ. I ÉS TB. UNA MANERA DE SABER SI L'HA ENTÈS.

Isabel

la Política, ... Además, el alumno verá que las Matemáticas son una ayuda imprescindible para poder explicar multitud de aspectos del mundo que nos rodea. Tan sólo ha de dar un vistazo a cualquier

Isabel

... aplicació que és vegi amb claredat. ... sense dos matemàtiques s'ensenyen sense cap exemple d'aplicació quotidiana tant en l'àmbit col·loquial o industrial. Jo crec per començar amb l'ensenyança de les matemàtiques s'hauria de fer primer una introducció en les relacions que tenen les matemàtiques amb la vida quotidiana ja que és ...

Òscar

V Premi Angeleta Ferrer i Sensat 2004

En primer lugar dire que estoy completamente deacuerdo con la manera de enfocar la asignatura, buscando la motivación y la creatividad por encima del trabajo automatizado y memorizado como si de robots fotocopiadores se trataran los alumnos.
Esta manera de enfocar la asignatura me ha dado la oportunidad de unir hobi con matematicas algo que hasta la fecha me parecia del todo imposible.

José

Creiem que s'hauria d'encaminar la docència més cap a les possibles aplicacions pràctiques i no tant cap a la part tèorica. D'aquesta manera l'estudiant es familiaritzaria molt més amb la matèria i no es faria l'assignatura tant pesada per estudiar.

Lluís

Els comentaris són prou adequats, enriquidors i adients per justificar la inclusió del modelatge matemàtic i l'estudi de situacions reals en els currículums de matemàtiques.

La meva anàlisi dels comentaris és força positiu; és engrescador trobar opinions que qüestionen la utilitat de les matemàtiques i en particular en les escoles tècniques.

De les aportacions dels alumnes podem extreure una primera avaluació dels resultats.

Viabilitat de la metodologia

"Ensenyar és aprendre dos vegades"
Joseph Joubert

La inclusió del modelatge

Arran de l'experiència exposada intentaré justificar la necessitat d'integrar tècniques de modelatge en els temaris de matemàtiques.

Existeix un conjunt de raons de per què cal incloure aplicacions de la matemàtica en els currículums. La principal és **preparar els alumnes per a una millor inserció en la societat**, ja que considero que tots els ciutadans en la seva tasca professional del dia a dia estem immersos a resoldre problemes (des dels més elementals –quan anem al mercat– fins als més sofisticats –l'enginyer que ha de construir un pont), fer estimacions, prendre decisions, etc. Cadascú en el seu ofici utilitza la matemàtica en alguna mesura o altre: la matemàtica és present en el tarannà diari.

Per començar crec oportú posar de manifest les principals conclusions plasmades pels mateixos estudiants, ja que són una mostra prou suggestiva per tal de justificar el modelatge matemàtic com un element a tenir en compte en l'elaboració de les directrius curriculars.

Avaluació dels resultats

1. Les aplicacions i el modelatge matemàtic constitueixen una forma de motivació dels alumnes: els alumnes no gaire afavorits en matemàtiques (principalment per l'ensenyament tan teòric que han patit anteriorment) se senten fortament motivats perquè veuen un sentit al que estudien.
2. Les aplicacions del modelatge com un component cultural: certes aplicacions de la matemàtica que hem tractat en les unitats didàctiques i els projectes tenen un component cultural important, els estudiants han descobert aspectes no pròpiament matemàtics; per exemple: la biografia d'en Robert Hooke, anàlisis de circuits elèctrics, l'existència de l'astronauta Miguel López Alegría i la seva aportació als viatges espacials, Michael Schumacher, la familiarització amb programari de càlcul simbòlic, etc. Tots ells formen part del context de la vida quotidiana, no només de l'enginyer, i que a través dels treballs desenvolupats pels estudiants he pogut comprovar que han adquirit uns coneixements del que podríem anomenar *cultura general per adquirir una ciutadania intel·ligent*.
3. El modelatge constitueix una forma d'evitar aprenentatges incorrectes: tradicionalment els estudiants aprenen rutines; amb aquestes pràctiques s'obté un major grau de creativitat i descoberta; queden en segon terme les rutines pròpiament mecàniques. D'aquesta manera he aconseguit que desaparegui la tendència per la memorització de fórmules que no tenien prou clares les seves aplicacions.
   Tanmateix s'estimula el procés creatiu, ja que els alumnes (com podem comprovar en les seves aportacions i afirmacions) han tingut inquietuds pel descobriment i d'una manera creativa han descobert i modelat les eines escaients per resoldre les diverses activitats plantejades.
4. El modelatge com a forma de reconeixement d'estructures: conèixer un conjunt d'axiomes és quelcom diferent de reconèixer una estructura matemàtica en situacions físiques, químiques, i fins i tot de la pròpia matemàtica. A partir de l'ús de tècniques de modelatge, els estudiants han reconegut que diferents situacions comparteixen el mateix model.

Els lligams entre situacions extretes del món de la ciència i la tècnica, provoquen un grau més elevat d'integració del paper de les matemàtiques en la societat. En els casos mostrats podem concloure que els alumnes han adquirit una capacitat de reconèixer, comprendre, analitzar i avalar diversos estadis de l'ús de les matemàtiques, i contribuint a la resolució de problemes d'enunciat no matemàtic rellevants en altres àrees fora del context de la matemàtica teòrica.

La capacitat d'usar un concepte matemàtic inclou quelcom més que simples coneixements del concepte. Dels comentaris fets pels estudiants es desprèn que saber fer càlculs no és garantia que se sàpiga decidir en quines situacions cal realitzar aquests càlculs i com s'ha d'usar un resultat, després que aquest s'obtingui. Per poder interpretar els resultats d'uns càlculs, cal un reconeixement de l'estructura en què treballem i que hem modelat.

Pels arguments exposats anteriorment, en la situació actual, el procés tradicional del binomi ensenyament/aprenentatge no és gaire satisfactori. Dels comentaris sorgits dels estudiants cal destacar que existeix una càrrega de formalismes, una absència total de pràctiques de modelatge i fins i tot una sobrecàrrega d'estudis bàsics al primer curs d'enginyeria. Destaco:

1 Cal relacionar les matemàtiques amb la tècnica.
2. En els temaris actuals hi ha massa conceptes inútils, i per tant caldria reduir els temaris. Calen menys rutines i més creativitat!
3. Caldria menys formalismes i notacions no tant "recargolades", perquè s'aparten de la realitat immediata.

Les matemàtiques cada cop estan més introduïdes en la societat. Fins i tot en disciplines considerades tradicionalment humanístiques, cada cop hi ha més implantació de tècniques matemàtiques (aquest fet reforça la introducció de tècniques de modelització). Per fixar idees ens trobem amb àrees com l'economia, psicologia, ciències de la informació, etc.

Viabilitat del modelatge com a eina d'ensenyament

Resum de resultats

Exposaré un resum dels resultats, obtinguts com a conseqüència d'aplicar la metodologia.

Dels comentaris recollits anteriorment en podem establir els següents resultats:

1. Al mateix temps que l'alumne aprèn i produeix conceptes matemàtics que fins ara desconeixia: elements de càlcul matricial, equacions diferencials, sèries de Fourier; veu la utilitat de les matemàtiques en qualsevol faceta del seu entorn curricular i de la vida quotidiana.
2. Cal explicar conceptes nous per a l'alumne, no mitjançant un ensenyament teòric, sinó fent servir problemes tècnics modelats de forma adient; per tal que aquests estudiants puguin comprovar la utilitat de les matemàtiques en la seva formació i alhora descobrir llur necessitat per resoldre problemes de l'entorn professional.
3. Proporcionar un ensenyament més eficient: Epistemològicament, l'aprenentatge de les matemàtiques no es porta a terme explorant les construccions matemàtiques en si mateixes, en les diferents formes en què han cristal·litzat al llarg dels segles, sinó en contacte continu amb les situacions del món real. Es tracta de donar un enfocament heurístic, d'afavorir la creativitat i motivar els estudiants a les necessitats reals dels continguts matemàtics. Per tant, cal posar a la disposició dels estudiants d'enginyeria un conjunt de recursos per tal que entenguin més àmpliament l'aplicabilitat dels conceptes que els transmetem en la seva formació; en definitiva, com usar les tècniques apreses en un context real. Considerem doncs, que el treball en unitats didàctiques i els projectes són elements que cobreixen aquestes perspectives, i proporcionen per tant un ensenyament eficient.

Què hem aconseguit en les diverses pràctiques realitzades?

En les unitats didàctiques:

1. Que amb un mínim de coneixements de secundària i sense els formalismes propis de l'ensenyament tradicional, els estudiants aconsegueixin construir el model matemàtic de la situació plantejada i aprenguin conceptes matemàtics que els siguin útils.
2. Que resolguin el problema en termes matemàtics i que tot seguit interpretin el/s resultat/s en termes tècnics. D'aquesta manera tanquem el cicle del procés de modelització.
3. Motivar l'estudiant per a l'aprenentatge de nous conceptes matemàtics que ell mateix construirà: aprenentatge autodirigit. Aquest fet motivador s'esdevé com a conseqüència de presentar les matemàtiques relacionades amb altres àrees de la ciència, com una activitat cultural i social lligada als interessos curriculars de l'estudiant.

En els projectes:

1. Hi ha un component pedagògic diferent de l'anterior, un component de recerca: l'estudiant ha de recollir informació per tal de desenvolupar les activitats que li són proposades. D'aquesta manera es pretén que l'alumne prengui contacte amb el món extraacadèmic i s'espavili per recollir informació en el context real –fet habitual de tot professional que acaba l'enginyeria.
2. Els objectius principals assolits de la realització d'un projecte els podem resumir en els següents punts:
   a) Les matemàtiques com a eina. Els alumnes són capaços de relacionar els coneixements matemàtics i les habilitats adquirides amb les situacions presentades, i d'aquesta manera saben usar la matemàtica per a fins pràctics. Notar el paper de la matemàtica com un mitjà per resoldre els problemes que se li plantegen.
   b) Adquisició de conceptes. En els projectes hi ha una gran quantitat de conceptes matemàtics i extramatemàtics involucrats, amb aquesta metodologia es descobreixen per tant nous conceptes, no només de l'entorn purament matemàtic.
   c) Els alumnes han adquirit un grau de coneixement que els permet utilitzar més endavant, en la vida diària, elements matemàtics com ara taules, manuals, gràfics, revistes tècniques, etc.

Personalment, entendré per projecte, una activitat d'aprenentatge per la qual l'estudiant adquireix i aplica coneixements i habilitats per solucionar un problema autèntic o simulat que té relació amb el món quotidià.

El compromís del professor

Si els estudiants han de fer ús de les oportunitats de formació, els professors no només han de demostrar un elevat grau de disponibilitat, sinó que també han de relacionar-se amb els estudiants d'una manera que sigui coherent amb la pràctica de les habilitats de l'estudiant.

El professor ha de facilitar recursos. Això significa que ha de resistir-se a moltes de les temptacions de l'ensenyament tradicional:

a) Rebutjar a tenir el paper d'expert o controlador de l'aprenentatge.
b) Usar només tècniques d'indagació que permetin als estudiants descobrir les respostes i solucionar els problemes per ells mateixos.

Però principalment representa convertir-se en el director de l'entorn de l'aprenentatge, la persona que fa que les condicions siguin estimulants i segures per tal que els estudiants puguin explorar segons les seves pròpies directrius.

Inicialment, pot ser que els estudiants no tinguin algunes de les habilitats bàsiques, com ara l'ús de biblioteques, redactar treballs, i per tant és possible que necessitin instrucció per traspassar aquesta barrera. Més tard, i a mesura que van superant els reptes més difícils del treball, cal que el tutor els doni suport moral. Finalment, quan són propers del final, ha de desaparèixer de l'escena.

Tot seguit incloc un quadre on es fan paleses les situacions d'aprenentatge i l'actuació del professor en cadascuna. Les situacions assenyalades i suggeriments són vàlids no només en l'àmbit de les matemàtiques, fet que pot enriquir el debat del noble ofici d'educar.

Situacions d'aprenentatge	*Principis d'ensenyança en projectes: el paper del professor*
Els alumnes tenen la necessitat d'aprendre.	El professor: – Ajuda els estudiants a reconèixer la necessitat d'aprendre. – Ajuda els estudiants a establir les seves fites personals d'aprenentatge.
L'entorn de l'aprenentatge és còmode des d'un punt de vista interpersonal i físic.	– Cal garantir la comoditat de l'entorn físic. – El professor accepta i respecta els estudiants. – El professor cal que faci créixer la confiança mútua i l'ajut entre els estudiants. – Actua com un més que aprèn amb ells.
Les fites de l'experiència d'aprenentatge són compatibles amb les fites dels alumnes.	El professor involucra els estudiants en la formulació de les fites.
Els alumnes comparteixen la responsabilitat en la planificació i funcionament de l'experiència.	El professor involucra els estudiants en decisions comunes relatives al disseny i al funcionament de l'experiència d'aprenentatge.
Els alumnes participen activament en el procés d'aprenentatge.	El professor involucra els estudiants en el procés d'indagar.
S'utilitza l'experiència acumulada dels alumnes.	El professor ajuda els estudiants a usar la seva experiència acumulada. El professor relaciona les activitats i continguts de l'aprenentatge amb l'experiència passada dels alumnes.
Els alumnes tenen la sensació de progrés vers les seves fites.	El professor ajuda els alumnes a mesurar els seus progressos.

Reflexions sobre les matemàtiques

De l'experimentació s'esdevenen unes reflexions globals sobre les matemàtiques i el seu ensenyament. Els aspectes triats per comentar són:
1) ¿Què són les matemàtiques?
2) L'aprenentatge de les matemàtiques.
3) L'ensenyament de les matemàtiques.
4) El paper dels ordinadors.
5) Efectes socials.

¿Què són les matemàtiques?

Anys enrere, les definicions més freqüents de les matemàtiques se centraven en un esquema molt utilitari segons el qual les matemàtiques eren una assignatura per oferir un servei. Aquest servei consistia a motivar i fomentar l'aprenentatge de conceptes i qüestions, però sempre des d'un punt de vista purament matemàtic. *Així, les matemàtiques només tenien sentit dins el món de les matemàtiques i estaven desconnectades de la realitat*. Amb el temps, l'enfocament ha canviat. Avui en dia, amb la inclusió de les tècniques de modelatge i aplicació dins les matemàtiques escolars –les unitats didàctiques en són un exemple–, les matemàtiques s'han convertit en una eina potent en mans de l'estudiant per resoldre problemes de la vida mateixa. *Les matemàtiques són*, doncs, *una autèntica especialitat al servei de la ciència i de la cultura.*

Les matemàtiques cada vegada són més presents a la vida mateixa i els investigadors se n'aprofiten per fer avançar els seus processos de recerca. Però també en treu profit la indústria, que veu en les matemàtiques la possibilitat de resoldre problemes que ajudin a millorar la producció industrial. Així doncs, les matemàtiques s'han convertit en una eina al servei de la societat.

Per tant, podríem definir les matemàtiques com una especialitat al servei de la ciència i la cultura.

L'aprenentatge de les matemàtiques

"El modelatge matemàtic és l'art d'aplicar les matemàtiques a una situació de la vida real" Mogen Niss (1989). Amb les tècniques de modelatge i aplicació, l'estudiant aprèn matemàtiques d'una forma natural, dirigida i espontània. Aquest procés d'aprenentatge es fa mitjançant la unificació de tres elements:
1) El modelatge i les aplicacions
2) La resolució de problemes
3) La connexió amb altres assignatures.

¿Com estan relacionats els tres elements?

L'objectiu principal és que l'estudiant aprengui matemàtiques. Es parteix d'un problema real que pertanyi a alguna assignatura que no sigui la de matemàtiques (per exemple tecnologia, mecànica, electrònica, economia…). L'estudiant s'enfronta així a una situació real que a primera vista no té res a veure amb les matemàtiques. Per resoldre aquest problema (element 2) cal usar tècniques matemàtiques (element 3), i això es fa mitjançant uns models com poden ser les unitats didàctiques o la realització de projectes (element 1).

El que té de bo aquest procés és que l'estudiant primer *veu la necessitat* d'usar tècniques matemàtiques per resoldre problemes no matemàtics, després *dedueix* ell mateix les eines matemàtiques necessàries, i finalment resol el problema. Així, l'estudiant aprèn matemàtiques d'una forma relaxada ja que treballa dins un context real i pràctic.

¿Quina és la millor forma d'aprendre matemàtiques?

Si ens centrem en el món universitari, el primer element que hauríem de tenir en compte és *la formació matemàtica de l'estudiant abans d'ingressar a la universitat*. La majoria d'estudiants que comencen els estudis universitaris tenen una formació matemàtica deficient, és a dir, que no arriba al nivell que s'espera que tinguin quan acaben l'ensenyament mitjà. Això és un hàndicap a l'hora d'aprendre nous conceptes matemàtics. Aquest problema es pot resoldre mitjançant una de les tècniques següents:

– El professor dóna als alumnes algun text bàsic

que els orienti de cara a reforçar la seva fluixesa matemàtica, i els ajuda, si convé, en les hores de tutoria corresponent. Vull fer especial èmfasi que hi ha pocs llibres per aprendre matemàtiques, però molts de matemàtiques. Precisament el que manca són llibres per aprendre matemàtiques!
– El programa de matemàtiques dedica el primer capítol a fer un repàs significatiu és a dir, curt i puntual, ja que així s'evita d'avorrir els alumnes que vénen molt ben preparats.
– L'escola crea uns cursos d'adaptació per ajudar els alumnes menys preparats a assolir el nivell necessari. Aquesta tècnica s'aplica en algunes universitats americanes i té l'inconvenient que requereix professorat especial per donar les classes. A l'Estat Espanyol els anomenats cursos zero no compleixen els requisits necessaris per cobrir aquestes mancances.

El segon element a tenir en compte és el grau de motivació de l'assignatura. Aquest punt és decisiu per aconseguir despertar en els alumnes l'interès per les matemàtiques.

Aquesta motivació es pot aconseguir mitjançant problemes d'assignatures no matemàtiques que s'hagin de resoldre utilitzant eines matemàtiques. Es tracta, doncs, d'aplicar les matemàtiques a situacions de la vida real. Aquesta tècnica, com hem dit al llarg del treball, es coneix amb el nom de modelatge de les matemàtiques i les unitats didàctiques i els projectes en són un exemple.

L'ensenyament de les matemàtiques

En la tècnica de modelatge i aplicació, el professor és l'encarregat de crear els models didàctics necessaris per a l'ensenyament de les matemàtiques. Aquests models es poden dur a la pràctica de forma escrita (com per exemple les unitats didàctiques) o de forma oral (classes). Tant en un cas com en l'altre, hi ha quatre aspectes a tenir en compte:
– El contingut
– L'extensió
– L'enfocament
– L'activitat de l'estudiant

El contingut: fa referència a la mena de situacions no matemàtiques que cal usar per portar a terme el modelatge i l'aplicació. D'aquestes situacions, n'hi ha de molts tipus. Podríem dir que s'estenen al llarg d'un espectre continu, en un extrem del qual trobem afers que, de fet, són purament matemàtics: equacions diferencials i càlcul matricial en són un exemple, però que estan disfressats amb un llenguatge no matemàtic, i a l'altre extrem hi ha situacions que pertanyen plenament a assignatures i contextos no matemàtics: el llançament d'una nau espaial, n'és un exemple.

L'extensió: fa referència a la quantitat de temps que caldria dedicar al modelatge i aplicació dins un curs normal de matemàtiques. S'hi poden dedicar des de poques sessions fins a parts substancials senceres de curs.

L'enfocament: fa referència a com s'haurien de tractar els aspectes no matemàtics dins el modelatge. Hi ha, bàsicament, dues maneres de fer-ho: exposant clarament els problemes no matemàtics a tractar és a dir, donant un guió fet o bé deixant que sigui l'estudiant mateix qui seleccioni i especifiqui els problemes que s'han d'abordar.

L'activitat de l'estudiant: fa referència al tipus d'activitats que es podrien arribar a dissenyar. Així, tindrem des d'activitats *passives*, en les quals l'estudiant rep coneixements a través d'exposicions orals i escrites dirigides pel professor, fins a activitats *actives*, en les quals l'estudiant realitza de vegades en grups treball independent sobre material que ell mateix ha creat.

Hi ha cinc raons importants per incloure els modelatge matemàtic en els plans d'estudi i que es dedueixen de la pròpia experiència desenvolupada:
– Aconseguir que els estudiants tinguin una actitud creativa.
– Desenvolupar l'habilitat dels estudiants en l'ús de les matemàtiques dins de situacions no matemàtiques.
– Capacitar els estudiants en la pràctica d'aplicacions i tècniques de modelatge, tant per aplicar-les a altres assignatures com per desenvolupar-les en una futura activitat professional.
– Establir una imatge equilibrada de les matemàtiques i donar-los la importància que els pertoca en el món real.
– Ajudar l'estudiant a adquirir i comprendre tècniques i conceptes matemàtics o motivar-lo perquè estudiï altres disciplines matemàtiques.

Aspectes a tenir en compte per millorar l'ensenyament de les matemàtiques:
1) Les matemàtiques s'han de coordinar amb les altres assignatures. S'ha de tendir, per tant, més a la generalització i a la integració que a l'especialització. Les matemàtiques han de servir com a eina útil per a les altres assignatures.
2) Les matemàtiques s'han d'ensenyar fent referència a la vida quotidiana i a les necessitats reals dels nostres interlocutors. Es tracta de plantejar problemes reals sorgits del món real, ja que aquest serà el futur medi de treball dels ciutadans que formem. Per tant, no només és important proporcionar l'eina –les matemàtiques– sinó també ensenyar-ne l'ús dins de situacions reals que poden aparèixer en la pràctica.
3) Els conceptes matemàtics s'han d'explicar donant-los una certa lògica. S'ha d'evitar, doncs, una presentació de la matèria massa formal, basada només en deduccions. En aquesta línia, s'ha de donar pas a la intuïció i deixar una mica de banda la rigorositat dels teoremes i les afirmacions.
4) L'ensenyament de les matemàtiques s'ha d'enfocar de cara a donar una bona formació bàsica que prepari l'alumne per poder continuar aprenent matemàtiques al llarg dels seus estudis i de la seva vida professional. Per això, cal insistir en els conceptes, en lloc de carregar els programes de l'assignatura amb excessos de teories i de tècniques.
5) L'ús d'un bon llibre de text per a l'ensenyament de les matemàtiques és una tècnica molt avantatjosa ja que:
   – Desenvolupa l'habilitat de l'estudiant per aprendre matemàtiques sense l'ajut del professor.
   – Evita haver de prendre apunts i, per tant, facilita l'atenció a classe.
   – Permet d'aprendre la matèria d'una forma més flexible.
   – Motiva els estudiants.

   Vull recordar i fer especial èmfasi en el concepte de "llibre de text"; en els "llibres de text" cal distingir dues concepcions:
   i) El llibre de text per aprendre matemàtiques: Tradicionalment, els llibres recomanats en les assignatures de matemàtiques de les disciplines de ciències, no són per aprendre matemàtiques. Són autèntics tractats de matemàtiques amb un vocabulari poc adequat per a no iniciats. Recordo les meves èpoques d'estudiant en què els llibres de matemàtiques del batxillerat no s'entenien. Tot just quan cursava els estudis superiors vaig començar a comprendre les explicacions exposades en els llibres de cursos previs. No cal dir que les aplicacions i la connexió amb situacions usuals eren unes mancances prou evidents. Caldria introduir i incentivar els autors, encara que això signifiqui un esforç addicional, perquè tinguin la voluntat d'editar llibres més entenedors que mostrin la connexió de les matemàtiques amb la vida quotidiana.
   ii) El llibre de matemàtiques: No estan orientats, tal com he justificat més amunt, cap a l'aprenentatge. Són bons llibres de consulta per als qui es dediquen a les matemàtiques. Tenen sentit per als qui desitgin esbrinar i endinsar-se en les construccions formals i clàssiques dels teoremes, corol·laris i lemes.
6) Cal que els professors de l'assignatura estiguin contínuament al dia dels avenços i estudis que es realitzen en el camp de la didàctica de les matemàtiques. Per fer-ho, poden recórrer a les revistes especialitzades sobre el tema que es publiquen periòdicament.

A la Universitat de Warwick (Anglaterra), s'hi ensenyen les matemàtiques d'una forma òptima. A tall d'exemple, vegem com funciona un 1r curs d'enginyeria:

Els alumnes disposen d'un llibre de text que s'ajusta al programa. Cada dimarts hi ha una sessió plenària en què el professor descriu la matèria per a la setmana i en comenta els punts més interessants de cara a l'enginyeria. Durant la setmana, els alumnes estudien la matèria i fan els exercicis al seu ritme. El dilluns següent, es fa la sessió de tutoria en grups de dos o tres alumnes amb un professor. Així, es realitza un seguiment acurat de la feina de cada alumne.

Sens dubte és una situació envejable, però impensable en les nostres escoles, on els grups són, de vegades, de més de cent estudiants.

En l'experiència realitzada es pot comprovar que el treball amb projectes dóna lloc a un ensenyament eficaç i que, per tant, hauria de ser inclòs en els plans d'estudi de les matemàtiques. Això avala que la metodologia i el marc teòric són vàlids en nivells educatius diferents.

El paper dels ordinadors

El tercer element a considerar és el *paper dels ordinadors* en l'aprenentatge de les matemàtiques. En una societat tecnològicament avançada del segle XXI no els podem ignorar. Els ordinadors cada cop estan més implicats en la feina del modelatge i aplicació. I no només quantitativament, amb l'aparició de maquinari i programari per facilitar la utilització de models, sinó també qualitativament, gràcies a l'aparició d'eines interactives per construir models, simulacions i examinar-los.

Revisem ara breument quin pes específic tenen el maquinari i el programari en les feines de modelatge i aplicació. Pel que fa al maquinari, la gamma de productes oferts va des de les econòmiques calculadores de butxaca programables i no programables fins als ordinadors portàtils, ordinadors personals, i estacions de treball que de vegades formen part d'una xarxa. Quant al programari, la varietat de programes és amplíssima. D'una banda hi ha els programes que fan **càlculs numèrics** amb nombres i funcions i **anàlisis numèriques** (resolució d'equacions, matrius…). D'altra banda hi ha els **programes gràfics**, els quals exposen taules i diagrames, dibuixen gràfiques de funcions i objectes geomètrics, mostren els efectes de canviar algun paràmetre, etc. També tenim els programes per realitzar **càlculs simbòlics** (integrals indefinides…). I per acabar, potser tenim els programes més importants: els que ofereixen **eines específiques per facilitar el modelatge**.

La incorporació dels ordinadors en l'ensenyament de les matemàtiques dóna lloc a tot un seguit de possibilitats com ara la il·lustració de conceptes i mètodes, i l'experimentació (tècniques de simulació). Els ordinadors permeten, així mateix, adaptar l'aprenentatge al potencial i ritme de cada estudiant (ensenyament assistit per ordinador). Pel que fa a les operacions molt llargues, com ara la resolució de grans sistemes d'equacions, hi ha programes d'ordinador potents que permeten trobar-ne les solucions, cosa que seria impensable de fer a mà.

Això no obstant, encara que a l'hora de la pràctica els estudiants puguin disposar cada vegada més de paquets de programari molt sofisticats per ferne un ús directe, és important que en coneguin també l'estructura bàsica, els algoritmes, ja que aquests constitueixen el fonament essencial de cada mètode.

D'altra banda, l'ús i l'ensenyament de paquets com el Mathematica, Matlab, Derive, Minitab, facilitaria la tasca de fer servir les matemàtiques per a les aplicacions.

Sense anar més lluny, les unitats didàctiques serien més eficients si estiguessin realitzades amb suport informàtic. Aquest fet permetria estimular l'estudiant que treballaria amb simulacions més properes a la realitat i amb més casos fins a assolir el grau d'aprenentatge esperat.

La web és també un element a tenir en compte en l'ensenyament: proporciona un element de comunicació i recursos que enriqueixen els coneixements. Cada cop més hi ha més pàgines dedicades a l'educació i l'aprenentatge, no només de les matemàtiques, sinó de les altres branques de coneixement. D'ençà de gener de 2003 es troba a la xarxa una eina de càlcul simbòlic, l'anomenat *wiris*. En l'annex s'inclou un llistat d'adreces web prou enriquidor per a l'educació matemàtica.

Efectes socials

Avui en dia hi ha la tendència general a acceptar que la tècnica de modelatge i aplicació de les matemàtiques té la capacitat de fer un servei a la societat. Aquest servei consisteix en el fet de demostrar, a través del modelatge de problemes reals, quina és la utilitat que tenen les matemàtiques dins la nostra societat.

Aquests darrers anys, s'ha produït un **augment de la demanda de les matemàtiques per part de diferents àrees de l'activitat investigadora tant en ciències naturals com socials** i hi ha hagut una expansió cap a diversos aspectes de la nostra vida quotidiana.

D'algunes ciències, com ara la física i la química, les matemàtiques n'han estat sempre una part inseparable. Però és en economia, sociologia, psicologia, urbanisme, lingüística, geografia, etc., on la necessitat de considerar científica la feina feta en aquests camps s'ha promogut un ús creixent de tècniques i mètodes matemàtics (estadística, optimització…). A través d'aquestes ciències, les matemàtiques es van endinsant lentament en la societat, estenentse des dels centres de planificació i direcció fins a arribar al ciutadà del carrer, que viu desbordat per nombres, des d'estimacions de percentatges de vot fins als interessos del seu compte corrent.

Potser, doncs, s'està fent realitat el somni de Descartes sobre la matematització del món: "Les llargues cadenes de raons simples i fàcils, per mitjà de les quals els geòmetres aconsegueixen assolir normalment les demostracions més difícils, m'havien proporcionat l'ocasió d'imaginar que totes les coses que poden arribar a ser conegudes pels homes s'entrellacen de la mateixa forma."
(Citat a Davis-Hersch, 1989).

En l'experiència es desenvolupa, doncs, el procés epistemològic de la modelització, és a dir, que es fa especial èmfasi en la teoria i els fonaments del mètode, sense deixar de banda els aspectes didàctics.

Conclusions generals

1. Es una activitat multidisciplinària que provoca que el coneixement en matemàtiques i en ciències sigui realment profitós. Els conceptes de les diverses àrees de coneixement i de la ciència s'apliquen en el context de l'enginyeria, prescindint de les divisions i fronteres que l'ensenyament tradicional estableix. D'aquesta forma destaco i potencio el caràcter formatiu de les matemàtiques, lligades al món quotidià de l'enginyeria.
2. La metodologia de la modelització matemàtica com a eina d'ensenyament/aprenentatge implementa protocols de treballs nous, absents en la docència tradicional, com el treball en grup, la verificació d'hipòtesi, l'ús de bibliografia, la defensa oral, l'ús de noves tecnologies.
3. La metodologia del treball en projectes presenta noves formes d'avaluació, continuada i formativa. Avaluar no és penalitzar.

El modelatge és una eina innovadora d'ensenyament eficient, i una corretja de transmissió que proporciona l'adquisició de coneixements i agermana matemàtica i realitat.

Annex I: Presència de les matemàtiques al nostre entorn: un recurs educatiu

"Com explicar que les matemàtiques, un producte de la ment humana, independentment de l'experiència, s'adapta tan bé als objectes de la realitat." (A. Einstein)

En el següent apartat s'intenta presentar un recull de situacions que formen part de l'entorn dels ciutadans i que pel seu tarannà poden servir de recursos educatius per educar matemàticament. Les situacions presentades són una proposta didàctica que poden contribuir a l'ensenyament/aprenentatge de les matemàtiques. Us convido doncs a realitzar un breu viatge pel món de les matemàtiques a partir de la seva presència en la vida quotidiana. Encetarem el tema parlant de proporcions.

Anem al cinema

Qualsevol de vostès ha assistit al cinema i sovint queda bocabadat per les escenes que ens ofereix el setè art. Encetem el viatge amb un record nostàlgic de la pel·lícula *King Kong*, un clàssic del 1932. La pel·lícula ens presenta una missió a unes illes verges i un equip d'exploració descobreix un goril·la de dimensions enormes que controla la vida de l'illa. És capturat i traslladat als Estats Units per tal de ser exhibit, l'animal es rebel·la en una lluita per la supervivència que el porta al cim de l'Empire State Building, des d'on és abatut per avions de combat. A la pel·lícula *King Kong* (1932) es va prendre com a model un goril·la real d'una massa aproximada de 230 Kg i una alçada d'1,8 metres i es van augmentar les seves dimensions a un monstre de massa 2.900 Kg amb una alçada de 145 metres. Aquesta massa resulta molt petita si del que es tractava era de fer un model a escala del goril·la.

Ara mostrarem com les matemàtiques proven que és erroni el canvi d'escala. Farem per tant una mica de matemàtiques!; per això mostrarem un resultat de geometria euclídea (del text "Els elements" d'Euclides, escrit 300 anys a.C.):

Si dues figures són proporcionals i "a escala" es verifica que si el quocient de les seves longituds és un valor *a*, aleshores el quocient de les seves àrees pren el valor *a2* i el quocient dels seus volums és *a3*, *a* s'anomena factor de proporcionalitat.

Si apliquem aquest resultat al monstre *King Kong*, un exercici elemental mostra el següent resultat:

El quocient d'alçades és: Alçada del monstre de la pel·lícula/alçada del goril·la escollit, és a dir: 145/1,8 val aproximadament 8; aleshores –segons el resultat de la geometria– el quocient dels volums hauria de ser $(8)^3 = 515{,}15$ Kg; vegem què s'obté:

	Monstre real	*Monstre pel·lícula*	*Quocient de proporció* a	*Proporció al cub:* a^3
Alçada	1,8 metres	14,5 metres	(14,5/1,8) = 8	512
Massa	230 Kg	2900	(2.900/230) = 12,60	2.001,7 (2 tones)
Massa ben proporcionada	230 Kg	x	(x/230)	Relació: (x/230) = 512; operant s'obté 117.760 (117 tones)

((Volum del monstre *King Kong*)/(volum del goril·la escollit)) és (2.900/230), que fent càlculs s'obté 12,6 Kg. Explicitem els càlculs en el següent requadre per tal de visualitzar millor les quantitat i poder fer estimacions.

Observem que a la pel·lícula es considera una massa de 2.900 Kg (aproximadament 3 tones), xifra que no està d'acord amb els postulats d'Euclides. Caldria una massa de 117 tones per tal de respectar les lleis de la geometria.

Aquest resultat mostra que el monstre *King Kong* no està correctament escalat.

Si respectem les dades (alçada i volum) del goril·la escollit per model i l'alçada que es proposa en la pel·lícula, per tal que fos ben proporcionat caldria que la massa fos de l'ordre de 178 tones; d'aquesta manera si fan càlculs es respectaria el resultat de geometria mencionat anteriorment que indica les proporcions adients.

Un monstre d'aquestes característiques difícilment podria ser tan àgil com per pujar a l'*Empire State*. Fins i tot no hagués pogut sostenir-se dret. El Tyranosaurus Rex, que fou l'animal bípede més gran que ha existit a la Terra, pesava només 7 tones!

El resultat que hem exposat sobre proporcions i geometria el poden usar per esbrinar la credibilitat d'altres pel·lícules.

Un altre personatge mític és en Superman. Un científic del planeta Kripton, Jor-el, descobreix la imminent explosió del seu gran Sol. Davant la passivitat del Consell, decideix salvar al seu petit fill, Kal-el, que es enviat dins d'una nau a un món llunyà, distant sis galàxies, anomenat Terra. Les diferents condicions ambientals del seu planeta li permeten desenvolupar poders tals com córrer a gran velocitat, aturar les bales amb les mans o volar. Ocult sota la identitat de Clark Kent, un simple periodista del Daily Planet a la ciutat de Metròpolis, Superman vetlla pel bé de la humanitat.

Aturar la Terra, invertir el sentit del temps o desviar un míssil nuclear han fet de Superman un exemple paradigmàtic de la noble legió de superherois de la ciència ficció. En el cinema, Superman atura un camió en moviment només estirant el braç. La física, juntament amb les matemàtiques, poden avaluar la distància que recorreria en Superman abans d'aturar el camió. Si suposem que en Superman, tal com mostra el cinema, té una massa de 90 Kg i la gravetat és 9,81, llavors segons la segona llei de Newton (força = massa x acceleració) la força ha de ser de 90x9,81, es a dir de 883 Newtons aproximadament. L'acceleració de frenada que actua sobre un camió de 50.000 Kg (el que mostra el film) i que circula a 30 Km/h és (Acceleració de frenada = Força/Massa) 883/50.000 = 0,018 aproximadament, per tant l'espai que ha de recórrer en Superman per aturar el camió és –segons la física– (el quadrat de la velocitat)/(el doble de l'acceleració), efectuant aquests càlculs s'obté 30 x 30/(2x0,018) = 25.000 metres, és a dir, 25 quilòmetres. Al film, Superman recorre una distància d'un metre! A la realitat, i malgrat els seus poders, no podria evitar ser arrossegat durant 25 quilòmetres abans d'aturar el camió completament! Per tant és impossible el que ens mostra el cinema.

Els ciutadans hem de saber què es manipulació i què es realitat. Les lleis de la natura no són tractades ni respectades amb prou rigor científic, la qual cosa provoca una confusió entre els espectadors; les matemàtiques ens proporcionen criteris i eines que faciliten la comprensió per tal de ser crítics i culturalment avançats; fet que el sistema educatiu no preveu i que considero que caldria introduir en els currículums acadèmics. Baralles que mai acaben, trets a tort i a dret, esclats de vehicles, escuts humans… moltes de les imatges del cinema són irreals i contradiuen les lleis de la natura, de la física i de la tècnica. Són imatges científicament impossibles. D'aquesta manera ens enganya el setè art! Per ampliar aquest tema els recomano el text *Física i ciència-ficció* d'en M. Moreno (1992). Podríem plantejar la qüestió: Hollywood ens estafa?

Com he apuntat abans, qualsevol de nosaltres hem anat al cinema, motiu que ens fa pensar en expressions com ara "Carai, això només passa a les pel·lícules?" Els ciutadans hem de saber on és la frontera entre la realitat i la ciència-ficció. Sovint les matemàtiques i la física poden oferir als ciutadans eines que ajudin a esbrinar què és possible i què no, què és real i què és pura ficció. Oferim com a recurs educatiu i com a proposta de projecte una breu visió del cinema i els seus protagonistes, i alhora una reflexió de com les matemàtiques poden ser útils per aclarir i entendre situacions i imatges que apareixen a la pantalla dels cinemes i que sovint són fruit de la imaginació i literalment impossibles ara per ara. Els estudiants i en general els ciutadans han de gaudir de criteris de què és ficció i de què és realitat!

En el film emblemàtic *La guerra de les galàxies*, en un dels diàlegs hi ha la frase: "Tenim l'objectiu a la vista, facin foc quan el vegin". Aquesta frase és usual en diversos films i posteriorment –quan l'objectiu és visible– la pantalla ofereix un espectacular llançament d'un tret destructor. Cal que sàpiguen que la tecnologia actual possibilita destruir objectius sense el contacte visual, per tant el diàleg esmentat no té sentit. Per això ens podem preguntar: ¿com és que a aquestes naus, tan avançades tecnològicament, els cal observar l'objectiu per tal combatre? La física mostra que les explosions no fan soroll en l'espai –ja que no hi ha oxigen–, contràriament al que ens mostra *La guerra de les galàxies*. Cal que els ciutadans tinguem una capacitat crítica per esbrinar aquests fets i no deixar-nos enlluernar per les meravelles del setè art.

Més coses… En el cinema els vehicles esclaten quasi sempre en xocar o en rebre un tret que impacta en el dipòsit de benzina.

A la realitat, el càlcul de probabilitats mostra que és poc probable que això passi. Per tal que fos possible, caldria que els vapors de la benzina s'acumulessin en el dipòsit, que el dipòsit estigués ple en una quarta part, i que a més a més estiguessin en contacte amb una flama; fins i tot amb aquestes condicions és poc probable que esclati el capó del cotxe tal com ens mostra Hollywood.

Una altra de les escenes usuals que sovint apareixen en les pel·lícules, principalment de suspens, és aquella en què l'assassí resta amagat entre l'espai del seient davanter i darrer del vehicle. Reflexionin, calculin! En general "la víctima" no s'adona que hi ha algú a l'interior del vehicle fins que hi és a dins i amb les portes tancades; si observen les ofertes dels vehicles del mercat actual –fins i tot els més espaiosos– no hi ha lloc suficient perquè una persona càpiga entre els seients davanters i darrers, les mesures són de 100x30x45 cm. Aquest tipus d'escenes solen estar filmades des de la part davantera del vehicle per tal que l'espectador no s'adoni que aquesta situació és impossible.

Notin com l'art de mesurar ens mostra situacions impossibles en moltes de les imatges que ens ofereix el cinema!

Els trets de vehicle a vehicle també són un fet habitual a les pantalles. Usualment apareixen escenes que es mouen sota les següents hipòtesis: dos vehicles circulant a més de 100 Km/h, amb canvis de carril, girs provocats per les corbes de les carreteres, imatges típiques de les persecucions…; el càlcul de probabilitats mostra que hi ha una possibilitat entre 100.000 d'encert. Reflexionin! Disparar des d'un vehicle a més de 100 Km/h no és tan senzill, la probabilitat d'encert és pràcticament zero; contràriament al que el cinema ens mostra! Si les pel·lícules fossin un mirall de la realitat quants vianants moririen en una persecució?

Ja que hem parlat de trets, parlem-ne. Les ràfegues de metralladora de la coneguda M-60 que usa en Rambo dispara 800 trets per minut, els cargols són de 100 bales, i cal canviar el canó cada 10.000 trets, a la pel·lícula el carregador es buida constantment –en menys de tres minuts– cosa que contradiu la realitat; a més, en el model esmentat no es canvia el carregador cada 10.000 trets; si fos així, al Rambo ja l'haurien mort fa dies! Sovint hem vist també com es disparen míssils des d'avions en estat de repòs –és a dir, aturats a terra–; a la realitat no es així, ja que com a mesura de precaució i seguretat les armes no s'activen si l'aparell no esta en marxa i el tren d'aterratge, abaixat.

Les lleis de la natura són tractades com un drap brut en el cinema, amb molt poc rigor científic. En els cossos exposats al buit de l'espai, les matemàtiques conjuntament amb la física mostren que ni es deformen ni esclaten, contràriament al que ens presenta la pel·lícula *Atmosfera zero*. Un organisme humà exposat a la manca d'atmosfera moriria asfixiat o congelat, però de cap de les maneres una variació de pressió el faria esclatar. A la pel·lícula *Independence Day* l'onada de foc llençada pels enemics que arrasa els túnels que connecten l'illa de Manhattan amb el continent provoca que la protagonista s'amagui en un lavabo, just abans que les flames la capturin. A la realitat, l'amagatall li hauria servit de ben poca cosa, perquè el foc que apareix a la pel·lícula hauria consumit tot l'oxigen i hauria mort d'asfíxia.

Deu segons i pum! Les bombes de rellotgeria de les pel·lícules tenen sempre un rellotge incorporat que indica el temps que manca per esclatar un cert objecte o edifici. Aquests rellotges van genialment bé per tal d'entretenir l'espectador i perquè el protagonista el desactivi just quan manquen dècimes de segon. A la realitat no és possible. L'única persona que sap quan es produirà l'esclat és qui l'ha construït i no li cal incloure un rellotge per informar de l'hora en què es produirà!

Els ordinadors, telèfons i altres aparells tecnològics funcionen d'una manera diferent de com es presenten al cinema. Cada cop que dues persones parlen en un *walkie-talkie*, és freqüent en el cinema que enraonin simultàniament; un *walkie-talkie* no és un telèfon mòbil, és un element de comunicació unidireccional, cal mantenir el botó premut per parlar i deixar-lo anar quan parla l'altre! A les pel·lícules les converses són simultànies, malgrat el cèlebre *"corto"*. També hem vist situacions de comunicació com el següent: en una central de policia es rep una trucada d'un delinqüent, en general un psicòpata o un segrestador. Els policies li donen conversa, però habitualment la trucada es talla abans de localitzar des d'on es realitza. Cal que els espectadors sàpiguen que existeix des de fa anys un aparell anomenat Caller Id que localitza en temps real el lloc des d'on s'efectua la trucada. Actualment, els telèfons mòbils i alguns de domèstics de sobretaula ja mostren el número de qui ens truca, indiquen a la pantalla des del lloc on es fa la trucada!

Una altra manipulació de la realitat la trobem en la pel·lícula *Missió impossible*. Al final es presenta una espectacular persecució amb una baralla entre els protagonistes. La baralla succeeix en el sostre del tren d'alta velocitat que enllaça França i Gran Bretanya pel túnel del canal de la Mànega. Un helicòpter, enganxat al tren, el segueix dins del túnel de manera que ha de maniobrar per esquivar un altre tren que circula en sentit contrari. Deixant de banda l'ínfima probabilitat que dues persones es puguin barallar i bellugar-se al damunt d'un tren circulant a més de 300 Km/h, el tren Eurostar gaudeix d'un sistema de cablejat en la seva part superior. En la pel·lícula, aquest cablejat no apareix, d'aquesta manera s'evita que molestin els moviments dels actors! A més, les dimensions de l'Eurotúnel són de 7,6 metres, espai suficientment petit com perquè un helicòpter no pugui maniobrar en l'interior del túnel. Un altre detall és el fet que dos trens en l'Eurotúnel no es poden creuar, ja que van per túnels separats (la pel·lícula mostra con es creuen en un mateix túnel).

Fem fotocòpies

Hom sap que un din A3 = 2 din A4, tipologia de paper usat en copisteries.

Recordem *Euclides*: Si (longitud petita/longitud gran) val *a*; llavors (àrea de l'objecte petit/àrea de l'objecte gros) és *a2*.

El clàssic paper de carbó per fer còpies ja és història, els "copions" –com deia la meva àvia– ja són una anècdota. Actualment existeix un format, anomenat din A4, que amb unes estranyes mesures (10.000/16 cm^2, es dir 625 cm^2) reprodueix tot tipus de documents. Aquestes mesures provenen del fet que 16 din A4 és un m^2 o 10.000 cm^2.

2 A4 = A3
2 A3 = A2
2 A2 = A1
2 A1 = A0 = 16 din A4 i mesura un 1 m^2.
De la mateixa manera podríem parlar de l'A5 i de l'A6.

(àrea D4/àrea D3) = (àrea D4/ 2àrea D4) = 0,5 = *a2* ; és a dir: *a* = l'arrel de 0,5 = 0,707.

En síntesi: (longitud de un objecte d'un D4/longitud objecte D3) val 0,707. En altres paraules: Longitud objecte en D4 = longitud objecte en D3 x 0,707.

Imaginin un arbre que en D3 fa 10 cm; en fer la reducció a D4 farà: 10 x 0,707 = 7,07

Compte! En reduir es redueix la superfície un 50% però els continguts només es redueixen un 30%, no a la meitat com podem pensar!

La llei d'Hondt

La llei d'Hondt estableix que si *n* és el numero d'escons, cal dividir els vots per 1, 2, …, *n* de cada coalició i dels valors obtinguts escollit els *n* valors més grans.

Per exemple, suposem cinc partits (A, B, C, D, E) per repartir 4 escons.

	Nombre de vots				
	A	*B*	*C*	*D*	*E*
Vots de cada partit	**1000** *1000*	**900** *501*	100 *100*	**2000** *2000*	60 *459*
Dividim per 2	**500** *500*	**450** *250,5*	50 *50*	**1000** *1000*	30
Dividim per 3	333,3	300	33,3	666,6	20
Dividim per 4	250	225	25	500	15

Segons la llei d'Hondt (en lletra negreta) el partit A obtindria 1 diputat; el B, 1 diputat; el D, 2 diputats.

En la situació en vermell (els números en cursiva) tindríem la següent distribució:
Partit A: 1 diputat
Partit B: 1 diputat
Partit D: 2 diputats

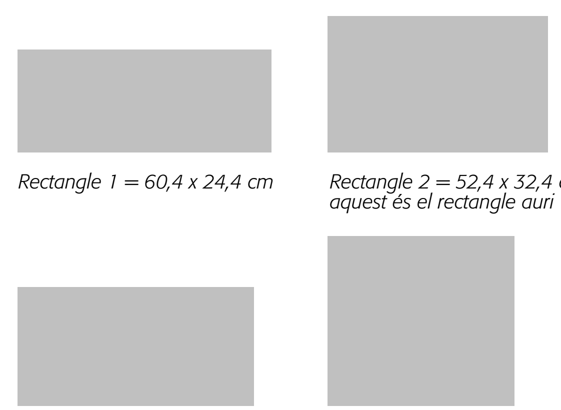
Notem que és la mateixa distribució que l'anterior! Pràcticament el partit A obté el doble de vots del B però tot i així té el mateix nombre de diputats i el D quasi té quatre vegades més de vots que el B i obté només el doble de diputats. Vegem un hipotètic cas en què es mostra el paper de les abstencions:

	Nombre de vots				
	A	*B*	*C*	*D*	*Abstencions*
	1000	900 +200 (1100)	10	950 +200 (1150)	1052 (–400) = 652
Dividim per 2	500	450 (550)	5	475 (575)	526 (326)
Dividim per 3					
Dividim per 4					

Notem que si compressin les abstencions caldria un escó buit; i com que no és el cas, s'observa que les abstencions provoquen un nou diputat al partit més votat. Si les abstencions s'haguessin afegit a D o a B, el partit D hauria obtingut un nou diputat en lloc d'A (és l'anomenat vot útil!). D quedaria amb dos diputats, tot i que té quasi el mateix número de vots que B! Personalment, considero que al Parlament hauria d'haver-hi escons buits, els que corresponen a les abstencions.

El número d'or Φ = 1.6180…

Els proposo que observin aquest seguit de rectangles:

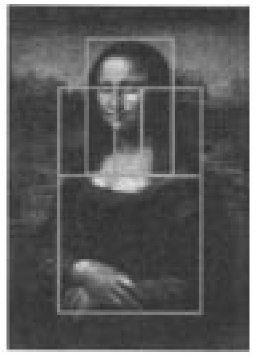


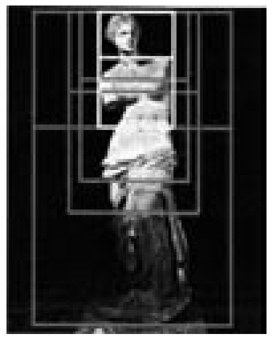
Rectangle 1 = 60,4 x 24,4 cm
Rectangle 2 = 52,4 x 32,4 cm aquest és el rectangle auri
Rectangle 3 = 56,2 x 28,2 cm
Rectangle 4 = 44,4 x 40,4 cm
Escala 1 : 10

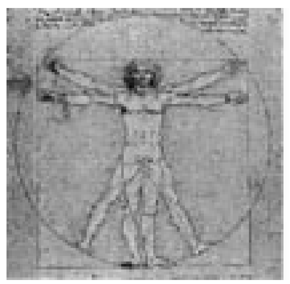
Fixem-nos-hi bé i escullin el que els sembli més bonic. Aquesta experiència s'ha fet en múltiples ocasions i el rectangle que majoritàriament ha resultat més atractiu és el segon. ¿Per què aquesta elecció? Observin que el segon rectangle verifica que el quocient entre el costat llarg i el petit és 1,6180… Aquest fet no és casual, les persones humanes tenim en el nostre subconscient una mena d'intuïció per les formes belles i harmonioses. El nombre 1,6180… és l'anomenat número d'or. ¿Què té d'especial aquest nombre i quina influència plasma en el tarannà dels ciutadans? La presència del nombre d'or a la societat és quelcom subtil que identifica l'harmonia dels elements bells i bonics de la societat. La seva presència la trobem en múltiples aspectes de la societat.

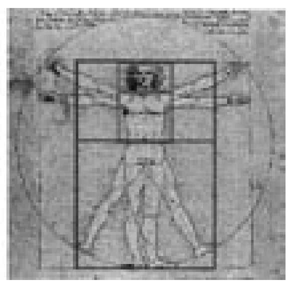
1. A la butxaca: Els document d'identitat, paquets de tabac, les targes d'altres documents.

2. A l'art: Dibuix anatòmic de Da Vinci, la Gioconda, Venus de Milo.

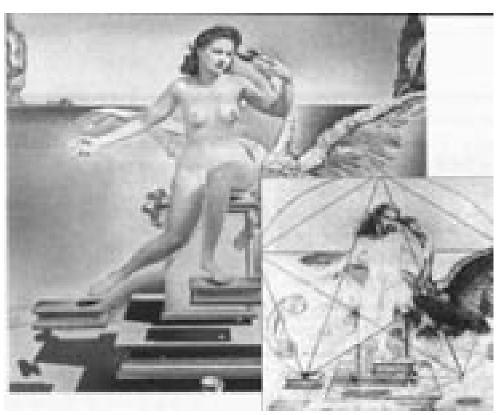






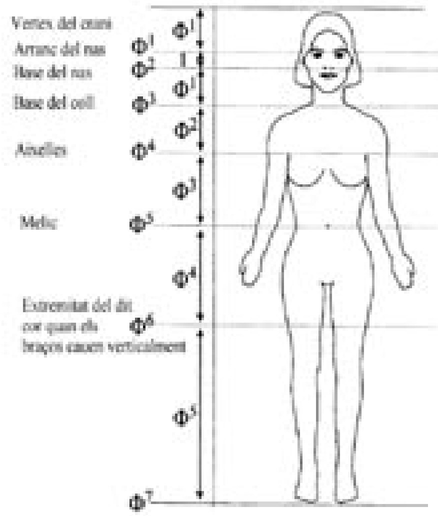


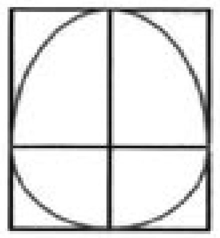
El número d'or i Dalí



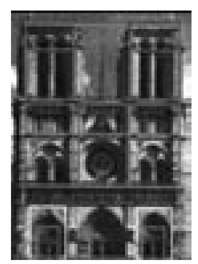
Dalí, *Leda atòmica*, 1949, basat en la proporció àurea. I en el pentagrama místic pitagòric.

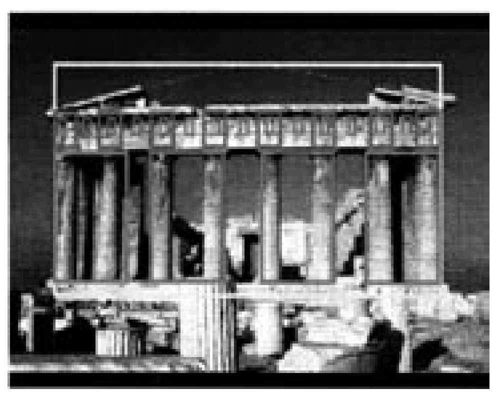
3. A la natura: L'alçada és 1,6 pel diàmetre del llombrígol, les proporcions dels dits de les mans, i fins i tot en un ou de gallina!





4. A l'arquitectura: Edifici Nacions Unides, Nôtre Dame, Partenó.





El número d'or i la successió de Fibonnaci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …

1. El creixement d'una població de conills:

El model seguit és el següent: el primer mes no són fèrtils, a partir del segon mes cada parella en reprodueix una de nova. Suposem que no es mor cap parella. S'obté doncs:

Primer mes: La inicial p0 (total 1 parella).

Segon mes: La inicial p0, ja que encara no és fèrtil (total 1 parella).

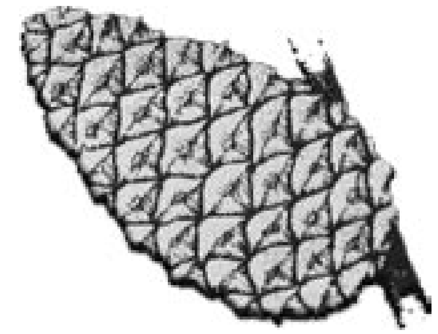
Tercer mes: Ja procrea, tinc una nova parella p1 i la p0 que tenia (total 2 parelles).

Quart mes: La p1 encara no és fèrtil, p0 en fa una altra; diguem-li p2 (total 3 parelles).

Cinquè mes: La p1 ja és fèrtil, tinc doncs la p1 i els fills de p1 que en direm p3, la p0 procrea (diguem-li p4); per tant tinc la p0 i la p2 (total 5 parelles).

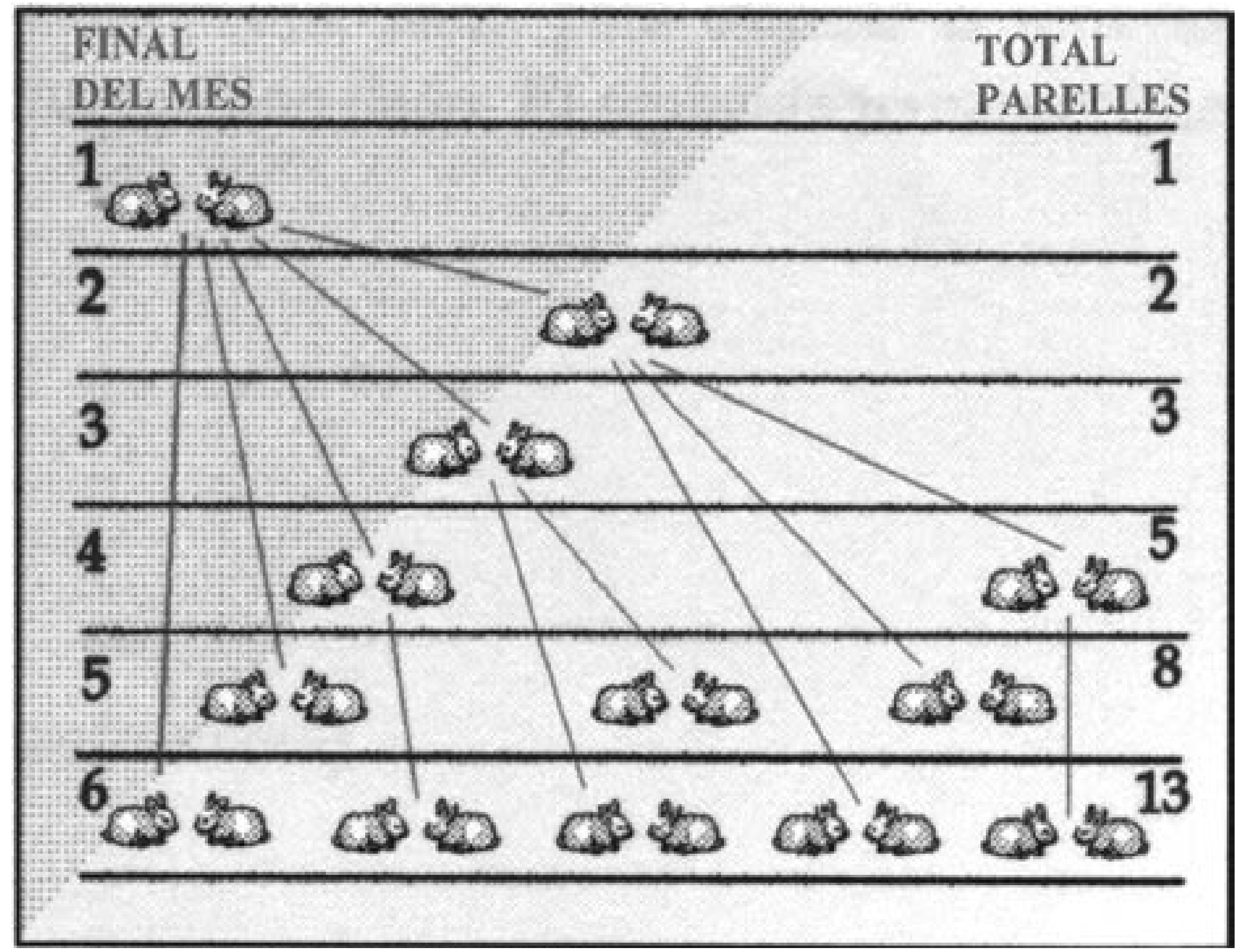
La seqüència numèrica és: 1, 1, 2, 3, 5, 8… que es coneix pel nom de successió de Fibonacci.

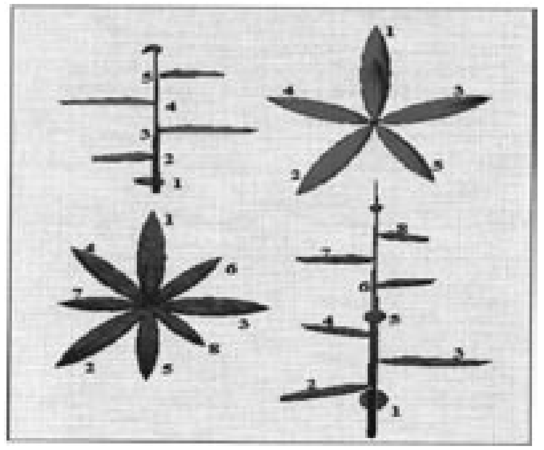
2. Les pinyes:



Si comptem les espirals que fan els pinyons en un sentit o en un altre, son sempre nombres diferents i a més son dos termes consecutius de la successió de Fibonnaci.

3. Les fulles d'una planta: Si considerem una planta, i dues branques amb fulles que estiguin "a la mateixa vertical"; entre ambdues hi ha un número de branques i fulles de la successió de Fibonnaci!





En síntesi, ¿què té de curiós la successió de Fibonnaci?

Si efectuem els quocients s'observa que:
1/1= 1
2/1 = 2
3/2 = 1,5
5/3 =1,66666
8/5 = 1,6
13/8 = 1,625
21/13 =1,615

………………………Ens acostem a 1,6180339!

Leonardo Da Pisa –Fibonacci– 1170-1250

Per acabar aquest apartat incloc un poema que al·ludeix al nombre d'or i escrit per en Rafael Alberti:

Divina Proporción
A ti, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura,
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.
A ti, cárcel feliz de la retina,
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de mesura
que el Universo armónico origina.
A ti, mar de los sueños, angulares,
flor de las cinco formas regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.
Luces por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera transparente.
A ti, divina proporción de oro.

El consum

Un passeig pel mercat

En un dia qualsevol, hom es pot desplaçar al mercat, on també trobem matemàtiques, ja que cal prendre-hi decisions! Dates de caducitat, capacitats dels productes envasats, els preus de les anomenades ofertes… Imagineu-vos un paquet d'arròs de 250 g que val 30 cèntims i un de 300 g que val 36 cèntims. En llegim la composició i observem que són idèntiques i de la mateixa qualitat. ¿Quin ens resulta més econòmic? ¡Calculeu-ho! Un càlcul elemental ens diu que els dos paquets tenen el mateix preu, però, malauradament, a la realitat, no sempre és així.

Una altra manera de presentar ofertes és en els formats següents. Imagineu-vos el mateix producte en quatre establiments diferents i proposat d'aquestes maneres:

Nom establiment	Oferta presentada
Troballes Esteve	Abans, 14,72 cèntims; ara, 11,96 cèntims (11,96)
Súper-Súper	14,72 cèntims. Ara, amb el 20% de descompte (11,77)
L'econòmic	Ara, 10,81 cèntims. (amb el 6% d'IVA no inclòs) (11,45)
Hiperbarat	Un, 14,72 cèntims. Si en compreu 3, us en regalem 1 (11)

Uns petits càlculs mostren que, indubtablement, el primer establiment és el més car i que el darrer és el més econòmic. En aquesta situació, caldria fer una estimació de la tipologia del producte. Malgrat que el quart establiment sigui el més econòmic, potser, no ens convé adquirir quatre peces! Cal saber veure les fronteres de les nostres necessitats.

Si no ens convé adquirir quatre peces, escollirem el tercer establiment, ja que és el més econòmic si desestimem el quart. En síntesi: abans de comprar res enlloc, cal controlar la qualitat, els preus, i les ofertes.

Exercici per al lector:
A títol de curiositat, mostrarem com un transportador d'angles pot mesurar la frescor d'un ou! (Vegeu *La matemàtica del consumidor*, Alsina-Fortuny.) Poseu un ou al fons d'un recipient (on tinguem 4 g de sal per litre): si és fresc, queda estirat a baix; si té entre 4 i 6 dies, el seu eix s'inclina 20º; si té entre 8 i 10 dies, s'inclina 45º…; i, finalment, quan no és fresc, acaba flotant a dalt. Vet aquí com un transportador d'angles pot servir per a determinar com és un ou de fresc! Els convido a fer-ne la prova a la seva llar.

Els recomano un passeig pel mercat, on les matemàtiques també hi són presents en consells apresos de pares a fills i oblidats pel pas del temps. Anem-hi, doncs!

Hi ha altres aspectes quotidians que serveixen per oferir recursos educatius i que ens permeten descobrir aquesta cara humana i amable de les matemàtiques. Voldria desitjar al lector que si les matemàtiques no han format part del seu passat, arran de la lectura d'aquest text, formin part del seu futur.

Tal com apunta el Dr. Claudi Alsina: "Les matemàtiques es fan amb el cap i s'ensenyen amb el cor".

Com a cloenda vull adjuntar un problema clàssic que parodia l'evolució de l'ensenyament de les matemàtiques en el pas del temps.

Problema del pagès

Ensenyament 1960: Un pagès ven un sac de patates per 1.000 ptes. Les seves despeses de producció s'eleven als 4/5 del preu de venda. ¿Quins són els seus guanys?

Ensenyament tradicional 1970: Un pagès ven un sac de patates per 1.000 ptes. Les seves despeses de producció s'eleven als 4/5 del preu de venda, això és, 800 ptes. ¿Quins són els seus guanys?

Ensenyament modern 1970 (LGE): Un pagès canvia un conjunt P de patates per un conjunt M de monedes. El cardinal del conjunt M és igual a 1.000 ptes., i cada element P de M val una pesseta. Dibuixa 1.000 punts grossos que representin els elements del conjunt M. El conjunt F de les despeses de producció comprèn 200 punts grossos menys que el conjunt M. Representa el conjunt F com a subconjunt del conjunt M i respon a la qüestió següent: ¿Quin és el cardinal del conjunt B dels guanys? Dibuixa B amb color vermell.

(Nota de l'autor: Els textos que vénen a continuació estan respectats de l'original i s'han respectat les faltes d'ortografia i l'estil de la paròdia.)

Ensenyament renovat 1980: Un agricultor ven un sac de patates per 1.000 ptes. Los gastos de producció s'eleven a 800 ptes. i el benefici és de 200 ptes. Subratlla la paraula "patata" y discuteix sobre ella amb el teu company.

Ensenyament reformat (LODE): Un payé vurgués, capitalista insolidari, esbanriquí am 200 ptes. al bendre especulant un sac de patatas. Analitsa el text y totsegit digues lo que pensis d'aket avus antidemocratic.

Ensenyament comprensiu 1990 (LOGSE): *(*Educació comprensiva és aquella que ofereix les mateixes experiències educatives a tot l'alumnat. L'aprenentatge ha d'assegurar que els coneixements adquirits a l'aula puguin ser* *utilitzats a les circumstàncies en què l'alumne viu i en les que pugui arribar a necessitar-les).* Des de l'entrada de Espanya a la CEE, els agricultores no poden fixar lliurement el preu de venda de les patates. Suposant que vulguin vendre un sac de patates per 1.000 ptes., fes una enquesta per poder determinar el volum de la demanda potencial de patates al nostre país i l'opinió sobre la qualitat de les nostres patates en relació amb les importades d'altres països, i com es veuria afectat tot el procés de venda si els sindicats del camp convoquen una vaga general. Completa aquesta activitat analitzant els elements del problema, relacionant els elements entre sí i buscant el principi de relació d'aquests elements. Finalment, fes un quadre de doble entrada, indicant en horitzontal, dalt, els nombres dels grups citats i, a sota, en vertical, diferents formes de cuinar les patates.

Ensenyament assistit per ordinador (en un futur no molt llunyà): Un productor de l'espai agrícola en xarxa de l'àrea global demana un data-bank conversacional que li displaia el day-rate de la patata. Després es dounlauea un software computacional fiable i determina el cash-flow sobre pantalla de mapa de bits (sota DOS, floppy i 40 MB). Dibuixa amb el ratolí en contorn integrat 3D del sac de patates i renderitza'l. Després fes un log-in a la Xarxa per 36.15 codi BP (blue potatoe) i segueix les condicions del menú.

Ensenyament futur, futur: Què era un pagès?

Fins aquí hem il·lustrat moltes de les coses que les matemàtiques ens poden oferir a tots nosaltres, com a ciutadans i ciutadanes d'una societat avançada del segle XXI i que alhora poden ser incloses en el sistema educatiu.

Annex 2: Adreces electròniques d'educació matemàtica

Comentari previ

La xarxa ofereix molts recursos educatius que poden ser d'utilitat. Per aquest motiu he considerat adient oferir un llistat d'adreces web on el lector pot consultar qualsevol tipus d'informació fiable en temes d'educació matemàtica. En el llistat que s'adjunta es troba un recull d'aspectes teòrics, didàctics, història de les matemàtiques, resolució de problemes, exemples pràctics, programari matemàtic, exposicions, articles, olimpíades, concursos, enllaços, notícies de congressos… I el més important: informació d'interès per dissenyar material propi adient per a les aules i de qualsevol nivell educatiu (tallers de matemàtiques, laboratoris…). S'ha fet una acurada tria d'adreces rellevants tant d'associacions de professors de matemàtiques com d'adreces personals del món de l'educació matemàtica. Probablement la llista està "desendreçada" per temes ja que moltes planes no es poden classificar com a monotemàtiques i totes contenen enllaços a altres planes d'interès. És el meu desig que tots vostès viatgin per aquestes planes i que –ben segur– trobaran els temes i recursos adequats per les seves necessitats. Malgrat tot, la llista d'adreces és de ben segur ampliable, i tinc la plena confiança de les mancances i absències que hi ha; cada lector podrà ampliar la llista amb de altres adreces que de ben segur desconec. Algunes de les planes detallades contenen un breu comentari orientatiu per al lector.

Llista d'adreces web

1. Societats de l'Estat espanyol

Real Sociedad Matemática Española
http://www.rsme.es/

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
http://www.fespm.org/

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
http://penelope.info–ab.uclm.es/mates/

Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales
http://thales.cica.es/

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas "Emma Castelnuovo"
http://www.smpm.es/

Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas
http://www.sinewton.org/

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
http://platea.pntic.mec.es/~anunezca/Sociedad/Soci.htm

Sociedad de Educación Matemática Al–Khwarizmi
http://www.semcv.org/

Sociedad Asturiana de Educación Matemática
http://www.pedrayes.com/index1.htm

Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques de Catalunya
http://www.feemcat.org/

Societat Catalana de Matemàtiques
http://www.iecat.net/institucio/societats/scmatematiques/ienn/cat/index.html

Organización Española para la Coeducación Matemática Ada Byron
http://www.adabyron.org/

Asociación Gallega de Profesores de Educación Matemática
http://www.agapema.com/

2. Societats rellevants d'altres països

Federación Europea de Asociaciones de Profesores de Matemáticas
http://www.fespm.org/feapm/feapm.htm

Institut Freudenthal de Holanda
http://www.fi.uu.nl/
Prestigiós centre holandès presidit per el Dr. Jan de Lange, dedicat a la recerca en educació matemàtica.

National Council of Teachers of Mathematics
http://www.nctm.org/
Una plana plena de recursos educatius de la societat americana NCT.

Comap: Mathematics Instructional Resources for Innovative Educators
http://www.comap.com/

Mathematical Asociations Of America
http://www.maa.org/

The European Methematical Information
http://www.emis.de/
Servei molt complet de l'associació Europea de Matemàtiques.

European School Net–Mathematics Department
http://www.macsinet.org/newsletter.htm

3. Altres pàgines d'interès

Aquí Matemàtiques!!!
http://www.xtec.es/recursos/mates/aqui/index.htm

Intermates
http://www.edu365.com/aulanet/intermates/index.htm

El Paraíso de las Matemáticas
http://www.matematicas.net/

Fòrum Sobre Educació Matemàtica
http://www.rediris.es/list/info/edumat.es.html
EDUMAT és una llista de distribució d'investigadors i professionals d'educació matemàtica de parla castellana de tots els nivells educatius. De fet, és un fòrum de debat que engloba temes d'actualitat en educació matemàtica.

New Brunswick Math Competition
http://www.math.unb.ca/mathcomp/

Olimpiada Matemática Internacional
http://www.kalva.demon.co.uk/imo.html

Miguel de Guzmán (Catedràtic d'Universitat, Complutense de Madrid)
http://ochoa.mat.ucm.es/~guzman/
En aquesta plana podem trobar des de material didàctic fins a recursos educatius i alhora reflexions sobre les matemàtiques i evidentment sobre el seu ensenyament.

Antonio Pérez Sanz (Professor de l'IES Salvador Dalí de Madrid)
http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/

Josep M. Fortuny (Catedràtic d'universitat, UAB)
http://blues.uab.es/~ipdm4/recerca.html
És una web totalment interactiva que ens ofereix material didàctic de tot tipus tant a l'abast dels estudiants com del professorat. És una bona eina per a l'ensenyament/aprenentatge de les matemàtiques.

Claudi Alsina (Catedràtic de Matemàtiques de la UPC)
http://www.upc.es/ea–smi/personal/claudi/
En Claudi ens obsequia amb aquesta web amb moltes de les seves encertades orientacions, conté algunes conferències que ha realitzat i un bonic passeig pel món de la matemàtica i els seus vells horitzons. No hi manquen un llistat d'enllaços molt interessants.

IES Pau Vila
http://www.xtec.es/~mmart163/index.htm

REDEMAT
http://www.recursosmatematicos.com/

Modelització Matemàtica
http://www.upc.edu/epsevg/modelitzacio

Números de Fibonacci, Proporció Àurea
http://www.mcs.surrey.ac.uk./Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html

Cabri II i Cabri 3D
http://www.cabri.net/

Clic
http://www.xtec.es/recursos/clic/esp/act/mates/index.htm

DERIVE
http://www.upv.es/derive/

MAPLE
http://www.maplesoft.com/

Biografies de Matemàtics
http://www.history.mcs.st–and.ac.uk/~history/BiogIndex.html

Número Pi
http://webs.adam.es/rllorens/pihome.htm

Resolució de Problemes Cal
http://www.xtec.es/~jjareno/

Euclides
http://www.xtec.es/%7Ejdomen28/indexelements.htm
És una excel·lent plana que conte *Els Elements* d'Euclides en català

Matemagnum
http://usuarios.lycos.es/matemagnum/index.htm

Mis Matemáticas
http://www.mismates.net/

Rincón Matemático
http://centros5.pntic.mec.es/ies.juan.de.mairena/index.htm

Calculadoras. Pàgines de Texas Instrument
http://education.ti.com/espana/index.html

Calculadores. Pàgines de Casio
http://www.flamagas.com/default.asp?NODO=5

Gacetilla Matemática
http://www.arrakis.es/~mcj/index.htm

DivulgaMAT (centre virtual de divulgació de les matemàtiques)
http://www.divulgamat.net/

Revista Suma
http://www.fespm.org/suma31ind.html

Análisis Matemático de Los Mosaicos de la Alhambra
http://centros5.pntic.mec.es/ies.la.serna/matemos.htm

Museo Virtual de M.C. Escher
http://nucleogestion.8m.com/hall.htm

Olimpiada Matemática Argentina
http://www.oma.org.ar/index.htm

Annex 3: Decàleg de la didàctica de les matemàtiques

Com a cloenda no puc tancar un treball de didàctica sense esmentar un dels millors mestres que ha tingut el món de l'ensenyament de les matemàtiques, en Pere Puig Adam (1900-1960), matemàtic i pedagog català.

En Puig Adam ens va deixar com a herència acadèmica el decàleg que adjunto i que considero un dels millors referents per endinsar-se en el noble ofici d'educar; decàleg que hem de reivindicar i tenir en consideració per tal d'assolir un ensenyament de qualitat. D'ell vull destacar literalment la cita extreta del llibre *Cálculo diferencial* (1958) i que és prou significativa pels continguts del present treball.

La matemática ha constituido, tradicionalmente, la tortura de los escolares del mundo entero, y la humanidad ha tolerado esta tortura para sus hijos como un sufrimiento inevitable para adquirir un conocimiento necesario; pero la enseñanza no debe ser una tortura, y no seríamos buenos profesores si no procuráramos, por todos los medios, transformar este sufrimiento en goce, lo cual no significa ausencia de esfuerzo, sino, por el contrario, alumbramiento de estímulos y de esfuerzos deseados y eficaces». (Puig Adam, 1958). Vegem tot seguit el meravellós decàleg:

I. No adoptar una didàctica rígida, sinó amotllar-la en cada cas a l'alumne, observant-lo constantment.

El centre de l'ensenyament avui no és el mestre, sinó l'alumne. L'acció d'aprendre ha arrabassat la seva antiga primacia a l'acte d'ensenyar. Ensenyar és avui estimular i guiar els processos d'aprenentatge. Per això l'acció del mestre queda condicionada en cada cas a aquests processos. Convé aquí recordar especialment aquest caràcter general de l'ensenyament por evitar que els professors de matemàtiques busquin en la didàctica solucions fixes i rígides con la mateixa Matemàtica.

II. No oblidar l'origen concret de la Matemàtica ni els processos històrics de la seva evolució.

Aquest oblit engendra una visió estreta de la finalitat educativa de la Matemàtica, i aquesta finalitat no s'ha de limitar al desenvolupament del raonament lògic abstracte. Les nocions i les operacions matemàtiques han tingut el seu primer origen històric en processos d'abstracció i esquematització del món físic real. La humanitat només ha pogut aplicar el mecanisme abstracte als problemes que se li han presentat després d'efectuar aquestes esquematitzacions. Els resultats d'aquesta elaboració abstracta s'han projectat novament al camp de la realitat en la interpretació i l'afrontament d'altres problemes. Els processos genètics del pensament matemàtic estan prou vinculats a la seva evolució històrica perquè no oblidem aquesta gènesi i evolució.

III. Presentar la Matemàtica com una unitat en relació amb la vida natural i social.

Per a la immensa majoria dels nostres alumnes la Matemàtica serà tan sols un instrument d'enfocament dels seus problemes quotidians. Educar-los matemàticament és força més que presentar-los el mecanisme abstracte de l'instrument de buit. Caldrà conrear, igualment, i en tot l'ensenyament matemàtic, el sentit de les aplicacions.

IV. Graduar amb molta cura els plans d'abstracció.

L'abstracció només provoca un allunyament dels problemes quotidians. Les matemàtiques poden oferir a l'ensenyament la seva presència vinculades amb d'altres disciplines, com la física, la química, la geografia, etc. L'amplitud d'aquestes qüestions pot ser ocasió per organitzar treballs en equip, i de promoure útils hàbils de col·laboració social i d'autodisciplina de grups de treball.

V. Ensenyar guiant l'activitat creadora i descobridora de l'alumne.

El noi i la noia no són dipòsits que s'han omplir de coneixements, sinó potencials que desitgen consentir-se en activitat. Guiem aquesta activitat en un sentit educatiu. Els processos d'adquisició de coneixements no s'han de divorciar dels d'adquisició o descobriment. La tasca del mestre és provocar l'activitat creadora de l'alumne i d'orientar-la en cada cas cap a la generació dels coneixement que s'intenti adquirir.

VI. Estimular aquesta activitat despertant interès directe i funcional vers l'objecte del coneixement.

L'estímul del noi o noia no ha de ser la coacció, o la freda proposta de qüestions que no despertin un interès directe vers llurs necessitats. Cal oferir afectivitat en la comunicació. En contra del que creu molta gent, les matemàtiques poden despertar l'interès i motivar als nostres estudiants; només cal presentar els continguts en forma estimulant i a partir de situacions properes a l'entorn dels nostres interlocutors.

VII. Promoure tant com sigui possible l'autocorrecció.

Una de les potencialitats educatives de la matemàtica està en el fet que els seus resultats són autocomprovables. En l'educació del caràcter i de la voluntat és fonamental el recurs a l'autocrítica. Un educant acostumat a corregir-se ell mateix pel senzill mètode de la comprovació dels propis resultats i, per tant dels seus propis errors quan els cometi, serà, potser, més caut a precipitar-se, més segur dels seus passos, més objectiu en els seus judicis i, qui sap, si més humil en les seves apreciacions.
Però cal que també el professor s'apliqui aquest precepte, que procuri comprovar objectivament ell mateix els resultats del seu ensenyament i millorar els seus mètodes d'acord amb aquestes comprovacions.

VIII. Aconseguir un cert mestratge en les solucions abans d'automatitzar-les.

Sovint és còmode per als mestres subministrar com més aviat possible "les regles" i repetir-les mecànicament. Actuant d'aquesta manera es crea el perill de provocar en els alumnes un cert automatisme mental. Aquesta manera de procedir és tant més perillosa en el fet que el mateix alumne, en el seu afany d'acció, acull amb alegria les regles que li permeten actuar ràpidament abans d'assimilar les essències metòdiques.

IX. Tenir compte que l'expressió de l'alumne sigui traducció fidel del seu pensament.

Cal tenir present el paper d'aprenentatge dels estudiants, deixar que parlin, que proposin les seves idees –malgrat que siguin inicialment errònies– i nosaltres, com a educadors, anar-los orientant. D'aquesta manera l'aprenentatge és més fluid, i l'estudiant va construint el seu propi coneixement.

X. Procurar que cada alumne tingui èxits que evitin que es desencoratgi.

Potser cap altra disciplina no crea entre els alumnes desnivells tan acusats com les matemàtiques. Això produeix en els menys dotats veritables complexos de desencoratjament i d'aversió envers la matemàtica que ja mai més tindran remei.

Tot ésser humà necessita l'alcaloide espiritual de l'èxit que estimula la seva vida de relació social; i si les grans dosis poden ser funestes, les petites són necessàries. Cal procurar subministrar-les als alumnes menys dotats, homogeneïtzant tant com sigui possible els grups i tenir una sensibilitat que sovint s'oblida.

Bibliografia

Presento una bibliografia bàsica per tal d'afrontar els reptes de millora de la qualitat docent i la innovació en el context de l'ensenyament de les matemàtiques. Molts d'aquest textos m'han servit per establir les directrius de la metodologia emprada i els fonaments teòrics. Fins i tot, les noves tecnologies ens permeten establir lligams per investigar les connotacions i el grau d'acceptació a nivell internacional de la implantació de nous mètodes d'ensenyaments de les matemàtiques, per aquest motiu he considerat oportú contribuir amb unes adreces web d'interès (incloses en l'annex 2) per l'ensenyament que poden enriquir bibliografia i alhora obrir portes per a noves propostes.

1. **Abrantes, Paulo** (1993), "Project work in school mathematics: an experience in Portugal". University of Lisboa.
2. **Abrantes, Paulo** (1994), "O Trabalho de Projecto e a Relaçao dos Alunos com a Matemática". Tesi doctoral. Lisboa.
3. **Alberti, Rafael** (1969), "La divina proporción", Extret d'*Antología Poética*, Editorial Losada, quinta edición.
4. **Alsina, Claudi** (1995), *Una matemàtica feliz*. Ed. Red Olimpica. Buenos Aires.
5. **Alsina, Claudi** (1997), "La tecnologia educativa és la resposta, la formació universitària és la qüestió". Jornades sobre la Reforma Acadèmica. 23 d'octubre de 1997. UPC. Barcelona.
6. **Alsina, Claudi** (2000), *Estimar les matemàtiques*. Columna.
7. **Blum, W.** (1994), *Teaching of mathematical modelling and applications*. Ed. E. Horwood.
8. **Dewey, John** (1938), *Experience and education*. New York: Collier books, Macmillan Publishing Company.
9. **Gibbs, Graham** (1995), *Aprenentatge independent i realització de projectes*. ICE de la UPC.
10. **Gómez, J.** (1999), *Per un nou ensenyament de les matemàtiques. Una proposta per a la Universitat*. Ed. CEAC.
11. **Gómez, J.** (2002), *De la enseñanza al aprendizaje de las matemáticas*. Ed. Paidós.
12. **Gómez, J.** (2001), *L'altra cara de les matemàtiques*. Ed. Cep i la Nansa.
13. **Guzmán, M.** (1993), *Tendencias innovadoras en educación matemática*. http://www.oei.es/edumat.htm.
14. **Kline, M.** (1986), *El fracaso de la matemática moderna*. Siglo xxi editores.
15. **Larson** (2003), *Cálculo I i II*. McGraw Hill.
16. **Niss, M.** (1993), "O papel das aplicaçoes e da modelaçao na Matemática escolar". *Educaçao e matemática*, no 23.
17. **Niss, M.** (1996), "¿Por qué enseñamos matemáticas en las escuelas?" Roskilde University, Dinamarca. *Revista Investigación y didáctica de las matemáticas*. MEC. páginas 19-30.
18. **Ortega i Gasset, J.** (1930), "Missió de la Universitat". *Obras completas*. Vol. 4. Alianza Editorial.
19. **Pólya, G.** (1994), *Métodos matemáticos de la ciencia*. Euler Editorial.
20. **Puig Adam, P.** (1958), *Ecuaciones diferenciales*. Nuevas gráficas S.A.
21. **Puig Adam, P.** (1979), *Cálculo integral*. 17a edició. Gráficas Lormo. Madrid.
22. **Ríos, Sixto** (1995), *Modelización*. Alianza Editorial.
23. **Santaló** (1985), *Educació matemàtica, avui*. Editorial Teide.
24. **Smullyan, R.** (1989), *¿La dama o el tigre?* Ediciones Cátedra, S.A.
25. **Triadú, J.** (2002), *Revista Biec* n. 27.

26. **VARIS** (1997), *Actas 8a JAEM*. Sociedad castellano-leonesa de profesorado de matemáticas. Salamanca.
27. **VARIS** (1991), *Breve historia de la educación matemática en España*. Ed. Emma Castelnuovo.